نشریه علمی-تخصصی تبدیل انرژی (JEED)
J. Energy Conversion
Volume: 12, Issue:4, 2026: 31-51
دوره ۱۲، شماره ۴، زمستان ۱۴۰۴، ص: ۳۱-۵۱

تحلیل جریان مرکب الکترواسموتیک و فشار محرک در میکروکانال‌های استوانه‌ای با در نظر گرفتن اثرات لغزش سطحی و پتانسیل زتای وابسته به لغزش

حسین تمیم [او*]

*۱- استادیار، گروه مکانیک، دانشکده فنی مهندسی، واحد اراک، دانشگاه آزاد اسلامی، اراک، ایران hossein.tamim@iau.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۴/۹/۲۹، بازنگری: ۱۴۰۴/۱۱/۱۵ ، پذیرش: ۱۴۰۴/۱۱/۲۳

چکیده

هدف اصلی این پژوهش، مطالعه تحلیلی جریان مرکب الکترواسموتیک و فشار محرک یک محلول آبی در میکروکانال استوانه‌ای است. اثرات لغزش سطحی و پتانسیل زتای وابسته به لغزش نیز در نظر گرفته شده است. معادلات حاکم شامل معادله پواسن-بولتزمن و معادله حرکت به‌صورت تحلیلی حل شده و تأثیر کلیه پارامترهای فیزیکی و الکتروسینتیکی بر توزیع پتانسیل الکتریکی، پروفیل سرعت و پارامترهای مرتبط با آن نظیر ضریب اصطکاک و نرخ حجمی جریان بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهد، لغزش سطحی تأثیر بسیار زیادی بر میدان جریان و توزیع پتانسیل الکتریکی می‌گذارد به‌طوری‌که افزایش طول لغزشی موجب افزایش هم پتانسیل الکتریکی و هم سرعت جریان می‌شود. رفتار مشابهی نیز با رشد پتانسیل زتای سطح دیواره میکروکانال مشاهده شده است. با اعمال گرادیان فشار معکوس و افزایش آن، به‌تدریج جریان‌های بازگشتی در مرکز میکروکانال پدیدار شده و ممکن است منجر به شکل‌گیری نرخ جریان‌های منفی (جریان کلی در جهت مخالف) گردد. بیش‌ترین دبی حجمی جریان و ضریب اصطکاک در حضور نازک‌ترین دولایه‌های الکتریکی (پارامتر دبای بزرگ‌تر) رخ داده است در حالی‌که روند متضادی در مورد دولایه‌های ضخیم‌تر مشاهده شده است. تغییرات دبی حجمی و ضریب اصطکاک نسبت به پارامتر گرادیان فشار به‌صورت خطی بوده است. از دیدگاه انرژی، نتایج این پژوهش می‌تواند در بهینه‌سازی مصرف انرژی در سامانه‌های میکروسیالاتی اهمیت داشته باشد، زیرا افزایش لغزش سطحی و کنترل پتانسیل زتا می‌تواند موجب کاهش افت اصطکاکی و افزایش کارایی انتقال سیال شود. هم‌چنین، یافته‌های این مطالعه قابلیت استفاده در طراحی میکروپمپ‌ها، ریزتراشه‌های آزمایشگاهی، سیستم‌های انتقال دارو و دستگاه‌های جداسازی الکتروسینتیکی را دارد و می‌تواند به توسعه سامانه‌های کم‌مصرف و با قابلیت کنترل دقیق جریان کمک کند.

کلمات کلیدی: جریان الکترواسموتیک، میکروکانال، لغزش سطحی، پتانسیل زتای وابسته به لغزش، حل تحلیلی.

* **عهده‌دار مکاتبات:** hossein.tamim@iau.ac.ir

نحوه استناد به این مقاله حسین تمیم. تحلیل جریان مرکب الکترواسموتیک و فشار محرک در میکروکانال‌های استوانه‌ای با در نظر گرفتن اثرات لغزش سطحی و پتانسیل زتای وابسته به لغزش. **مهندسی مکانیک تبدیل انرژی. ۱۴۰۴; ۱۲ (۴) : ۳۱-۵۱.**

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

۱- مقدمه

فهم هرچه بیش‌تر هیدرودینامیک پدیده‌های انتقال در میکروکانال‌ها، هم از لحاظ نظری و هم از لحاظ عملی در کاربرد سیستم‌های مختلف میکروفلوئیدیکی مانند میکروتوربین‌ها، میکروپمپ‌ها از جمله پمپ‌های الکترواسموتیک، میکروچیپ‌ها، میکرو مخلوط‌کن‌ها، میکرو جداسازها و دستگاه‌های آزمایشگاه روی تراشه[1] (LOC) اهمیت زیادی دارد [۱، ۲]. پدیده‌های الکتروسینتیکی در این سیستم‌ها نقش بسیار مهم و حیاتی ایفا می‌کنند [۳-۷]. در چنین جریان‌هایی غالباً خصوصیات سطحی هم‌چون آب‌دوستی/آب‌گریزی تأثیر به‌سزایی بر پتانسیل زتا می‌گذارند. به‌عنوان مثال لغزش سطحی در فصل مشترک مایع – جامد موجب رهایش یون‌ها شده و پتانسیل زتا را تغییر می‌دهد [۸-۹]. به‌دلیل دشواری اندازه‌گیری پتانسیل حقیقی سطح، معمولاً پتانسیل زتا به‌عنوان پتانسیل سطحی در نظر گرفته می‌شود. از این‌رو، پتانسیل زتا را می‌توان تابعی از غلظت محلول آبی، طول لغزشی و پتانسیل زتا در حالت عدم لغزش در نظر گرفت [۱۰-۱۲].

زمانی‌که شرط مرزی سرعت لغزشی در فصل مشترک جامد- محلول آبی اعمال شود، پتانسیل زتا با حالتی که شرط مرزی عدم لغزش در دیواره وجود دارد متفاوت می‌شود؛ به‌ویژه این‌که گرادیان سرعت در دیواره جامد قابل ملاحظه بوده و جذب یون‌ها با شدت بیش‌تری انجام شود [۱۳]. با وجود آن‌که عوامل مختلفی نظیر الکترواسموتیک، گرادیان حرارتی، گرادیان غلظت، گرادیان فشار، حرکت دیواره، میکروپریستالتیک و غیره در شکل‌گیری جریان در میکروکانال‌ها نقش دارند ولی الکترواسموتیک و فشار-محرک دو نوع رایج‌تر روش‌های رانش سیال به‌شمار می‌روند [۱۴-۱۸]. به کمک اختلاف هد هیدرواستاتیکی مخازن نگه‌دارنده دو انتهای میکروکانال و یا انسداد موضعی نظیر شیر مکانیکی می‌توان گرادیان فشار محوری در یک میکروکانال ایجاد نمود [۱۹-۲۰]. در جریان‌های الکترواسموتیک غالباً به‌دلیل استفاده از ولتاژهای بالا، تلفات گرمایش ژول قابل ملاحظه است. از این‌رو، می‌توان از جریان فشار محرک به‌عنوان یک عامل کمکی و کنترل کننده جانبی در برقراری جریان استفاده نمود [۳]. هوریوچی و دوتا[2] [۲۱] جریان الکترواسموتیک ترکیب شده با یک گرادیان فشار دلخواه را در یک میکروکانال مستقیم دوبعدی در حضور اثرات گرمایش ژول بررسی کردند. نتایج تحلیلی آن‌ها نشان داد که عدد ناسلت برای جریان الکترواسموتیک خالص بیش‌تر از جریان پوازی صفحه‌ای است. هم‌چنین هنگامی که جریان الکترواسموتیک و جریان فشار محرک هم‌زمان وجود دارند، گرادیان فشار معکوس نسبت به جریان الکترواسموتیک باعث کاهش طول ناحیه ورودی حرارتی و افزایش انتقال حرارت نسبت به جریان الکترواسموتیک خالص می‌شود. هندسه مشابهی به همراه میکروکانال مدور با استفاده از روش تحلیلی برای یک جریان کاملاً توسعه یافته ترکیبی توسط آفونسو و همکاران[3] [۲۲] سنجیده شد. آن‌ها مشاهده کردند که افزایش عدد دبورا در مقادیر کوچک‌تر ضخامت مشخصه ای دی ال موجب رشد سرعت سیال می‌گردد. مرداسی و همکاران [۲۳] از تکنیک روش المان محدود و شبکه‌های عصبی برای تحلیل جریان مرکب الکترواسموتیک – فشار محرک بهره گرفتند. در این پژوهش میکروکانال مستطیلی به به طول L و ارتفاع H در نظر گرفته شد. تأثیر وجود یک مانع مستطیلی شکل در یک میکروکانال طویل بر نحوه شکل‌گیری جریان گردابی در جریان ترکیبی الکترواسموتیک و فشار محرک توسط باتاچاریه و برا[4] [۲۴] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها هم‌چنین با تغییر هندسه بلوک مستطیلی و ناهمگنی پتانسیل زتا نحوه عملکرد اختلاط را سنجیدند.

در مطالعات پیشین اثبات شده است که شرط مرزی عدم لغزش در دیواره جامد ممکن است برای جریان‌های عبوری از میکروکانال‌ها صحیح نباشد [۲۴-۲۵]. این در حالی است که وجود لغزش در فصل مشترک جامد – مایع یک جریان الکترواسموتیک در مقیاس میکرو می‌تواند به شکل قابل توجهی میدان سرعت و در نتیجه توزیع درجه حرارت را دست‌خوش تغییر نماید [۲۶-۲۷]. لازم به ذکر است به‌دلیل چگالی بالا، در این شرایط هم‌چنان فرض محیط پیوسته سیال معتبر است. لی

[1] Lab-On-a-Chip
[2] Horiuchi and Dutta
[3] Afonso et al.
[4] Bhattacharyya and Bera

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

و جیان[1] [۲۵] به بررسی جریان الکترواسموتیک متناوب در یک نانوکانال با پلی الکترولیت با شرایط لغزشی در سطح مشترک پرداختند. آن‌ها نشان دادند ضریب پراکندگی به‌شدت تحت تأثیر پارامترهایی چون عدد رینولدز نوسانی، طول لغزش و ضخامت دولایه الکتریکی دارد. تئودورو و همکاران[2] [۲۶] شرایط مرزی غیرخطی را در دیواره میکروکانال اعمال نمودند و نشان دادند ضرایب لغزشی دیواره می‌تواند منجر به رشد دو برابری نرخ حجمی جریان عبوری شود. جینگ و همکاران[3] [۸] با استفاده از روش تحلیلی میدان پتانسیل الکتریکی و غلظت یونی محلول آبی را به ازای مقادیر بالای پتانسیل زتا در یک میکروکانال مستقیم یک بعدی محاسبه نمودند. آن‌ها در پژوهش خود شرط لغزشی را به صورت تابعی از بار سطحی تجمع یافته در نظر گرفتند. شیت و همکاران[4] [۲۸] تأثیر گرمایش ژول، تشعشع حرارتی، پرش دمایی و لغزش سرعت را بر جریان الکترواسموتیک یک بیوسیال غیرنیوتنی در میکروکانال شیاری شکل را بررسی نمودند. مطالعه آن‌ها که بر مبنای مدل قانون توانی استوار است، نشان داد که اثرات گرمایش ژول، تشعشع حرارتی و لغزش دیواره اثر قابل توجهی بر جریان الکترواسموتیک و انتقال حرارت می‌گذارد. علاوه برآن، نتایج آن‌ها حاکی از کاهش گرادیان سرعت و افزایش مقدار سرعت در مجاورت دیواره به ازای رشد پارامتر لغزش است. شرایط مشابهی توسط هج و هرکریشنان[5] [۲۹] مورد بررسی قرار گرفت. آن‌ها دریافتند وجود شرط لغزشی سرعت باعث ارتقای سرعت هلمهوتز-اسمولوچفسکی می‌گردد که در سیالات شبه پلاستیک نقش بسیار مهمی دارد. دو مایع ناهمگن مخلوط ناشدنی تحت تأثیر گرادیان فشار و میدان الکتریکی خارجی توسط موندال و همکاران[6] [۳۰] بررسی شد. سونگ و همکاران[7] [۳۱] با انجام رشته‌ای از آزمایش‌ها نشان دادند که چگونه خصوصیات آب‌گریزی سطح باعث تأثیر بر میدان جریان الکترواسموتیک می‌گردد. تأثیرات اصطکاک و وجود نانوشیارهای مختلف بر اثر لغزش در جریان‌های مایع با فشار بالا به‌صورت تجربی توسط چوی و همکاران[8] [۳۲] مطالعه شد. پارک و سون[9] [۳۳] در پژوهش خود موفق به ارائه یک رابطه نیمه‌تحلیلی برای تخمین ضریب لغزش و پتانسیل زتای سطوح ماکروسکوپی با دقت مناسب شدند. سراوانی و کلته [۳۴] شرایط مشابهی برای بررسی انتقال حرارت در جریان ترکیبی ناانوسیال در یک میکروکانال با ناهمگونی پتانسیل زتای سطحی و درجه حرارت یکسان در نظر گرفتند. نتایج عددی آن‌ها نشان داد که با افزایش کسر حجمی نانوذرات، سرعت در میکروکانال کاهش می‌یابد.

با بررسی جامع پژوهش‌های انجام شده قبلی می‌توان دریافت که در مطالعات پیشین یا از شرایط مرزی عدم لغزش [۳۵-۴۰] یا از پتانسیل زتای مستقل از طول لغزش [۴۱-۴۳] و یا در هندسه‌های بسیار محدودی از پتانسیل زتای وابسته به طول لغزش [۱۸] (مانند میکروکانال بین صفحات موازی) بهره گرفته شده است. این در حالی است در سایر هندسه‌های متداول نظیر میکروکانال‌های مدور نیز ممکن است پتانسیل زتای وابسته به طول لغزشی اثر چشم‌گیر و قابل ملاحظه‌ای بر میدان جریان داشته باشد. در هیچ‌کدام از مطالعات فوق‌الذکر، مدل پتانسیل زتای وابسته به لغزش [۹، ۱۱] برای استنتاج مشخصات میدان جریان نظیر پروفیل سرعت، تنش برشی دیواره، ضریب اصطکاک پوسته‌ای و نرخ حجمی جریان عبوری برای جریان ترکیبی الکترواسموتیک و فشار محرک در یک میکروکانال استوانه‌ای استفاده نشده است. بنابراین، هدف اصلی مطالعه پیش‌رو تحلیل جامع میدان جریان و توزیع پتانسیل الکتریکی برای یک جریان ترکیبی الکترواسموتیک- فشار محرک در یک میکروکانال استوانه‌ای شکل با فرض پتانسیل زتای وابسته به لغزش در فصل مشترک سیال- جامد است. هم‌چنین، میزان اثربخشی مدل اخیر از طریق مقایسه نتایج به‌دست آمده با نتایج متناظر در اعمال شرط عدم لغزش و پتانسیل زتای مستقل از طول لغزشی، به ازای پارامترهای فیزیکوشیمیایی مختلف سنجیده می‌شود. از مهم‌ترین جنبه‌های نوآوری این پژوهش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود:

[1] Li and Jian
[2] Teodoro et al.
[3] Jing et al.
[4] Shit et al.
[5] Hegde and Harikrishnan
[6] Mondal et al.
[7] Song et al.
[8] Choi et al.
[9] Park and Sohn

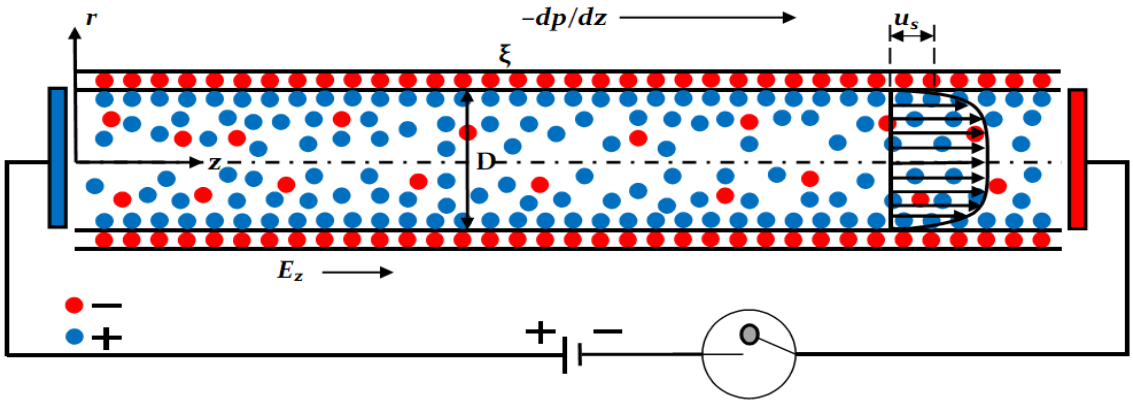
[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

- بررسی اثر پتانسیل زتای وابسته به لغزش در هندسه میکروکانال استوانه‌ای
- بررسی میدان سرعت در جریان مرکب الکترواسموتیک – فشار محرک در میکروکانال استوانه‌ای
- ارائه حل تحلیلی سرعت، ضریب اصطکاک و نرخ حجمی جریان در میکروکانال مدور تحت جریان ترکیبی و پتانسیل زتای وابسته به لغزش

۲- مواد و روش

در شکل (۱) جریان ترکیبی الکترواسموتیک و فشار محرک یک محلول آبی در میکروکانال استوانه‌ای به قطر D نشان داده شده است. میدان الکتریکی خارجی با شدت E_z در امتداد محور میکروکانال اعمال شده است. این میدان سبب حرکت یون‌های شناور و در نتیجه شکل‌گیری جریان الکترواسموتیک می‌گردد. علاوه بر آن، گرادیان فشار محوری یکنواخت dp/dz نیز موجب برقراری جریان تحت فشار در کانال می‌شود. باتوجه به علامت گرادیان فشار، این جریان فشار محرک ممکن است به‌صورت موافق یا مخالف با جهت جریان الکترواسموتیک برقرار گردد. افزون بر موارد فوق، در این پژوهش فرضیات زیر در نظر گرفته شده است:

- جریان به‌صورت یک بعدی، لایه‌ای و کاملاً توسعه یافته است.
- سیال به‌شکل نیوتنی رفتار می‌کند.
- خواص ترموفیزیکی سیال در محدوده دمایی مسأله ثابت است.
- جریان حالت دائم و تراکم ناپذیر است.
- سیال، محلول آبی ایده‌آل شامل یون‌های متقارن نمک است.
- پتانسیل الکتریکی دیواره میکروکانال به اندازه‌ای ناچیز است که تقریب خطی سازی دبای-هاکل[1] را معتبر می‌سازد.
- اثرات پتانسیل استریمینگ[2] القاء شده در قیاس با ولتاژ اعمال شده خارجی قابل صرف‌نظر است.
- توزیع پتانسیل الکتریکی و تمام مشخصات جریان در میکروکانال استوانه‌ای متقارن محوری است.



شکل ۱: تصویر شماتیک مدل فیزیکی جریان مرکب الکترواسموتیک و فشار محرک در یک میکروکانال استوانه‌ای

[1] Debye-Huckel linearization
[2] Streaming potential

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

۱-۲- توزیع پتانسیل الکتریکی

دولایه الکتریکی، در هنگام تماس محلول آبی با سطح جامد دیواره میکروکانال شکل می‌گیرد. دولایه الکتریکی شامل دو لایه به نام‌های لایه اشترن[1] (لایه فشرده) و لایه دیفیوز می‌باشد. لایه فشرده عموماً شامل یون‌های غیرمتحرک بوده و ضخامت آن از مرتبه اندازه یون‌ها است و لایه دیفیوز شامل یون‌های ناهمنام متحرک بوده که ضخامت آن به ۳ الی ۵ برابر ضخامت مشخصه دولایه الکتریکی می‌رسد. به‌دلیل سرعت نسبتاً پایین جریان در چنین کانال‌هایی می‌توان فرض نمود، توزیع پتانسیل الکتریکی تحت تأثیر جریان سیال قرار نگرفته و روابط مربوط به پتانسیل الکتریکی در محیط‌های دی‌الکتریک ساکن قابل استفاده می‌باشند [۴۴]. بر اساس نظریه الکترواستاتیک، رابطه بین پتانسیل الکتریکی ψ و چگالی بار خالص موضعی بر واحد حجم ρ_e در هر نقطه از محلول دی‌الکتریک به کمک معادله پواسن به‌شکل زیر توصیف می‌گردد:

$$\nabla^2\psi = -\frac{\rho_e}{\varepsilon} \quad (۱)$$

که در آن، ε ثابت دی‌الکتریک محلول است. با فرض این‌که معادله توزیع تعادلی بولتزمن قابل استفاده است، غلظت عددی یون نوع i در محلول الکترولیت متقارن به شکل زیر خواهد بود.

$$n_i = n_i^{\infty} \exp\left(-\frac{z_i e\psi}{k_b T}\right) \quad (۲)$$

که در آن n_i^{∞} و z_i به‌ترتیب غلظت یونی و ظرفیت یون‌های نوع i هستند، e بار پروتون، k_b ثابت بولتزمن و T دمای مطلق است. چگالی بار حجمی خالص با اختلاف غلظت بین کاتیون‌ها و آنیون‌های متقارن متناسب است.

$$\rho_e = ze(n_+ - n_-) = -2zen_{\infty}\sinh\left(\frac{ze\psi}{k_b T}\right) \quad (۳)$$

با جاگذاری معادله (۳) در معادله پواسن (۱)، معادله معروف پواسن - بولتزمن (P-B) به‌دست می‌آید.

$$\nabla^2\psi = \frac{2zen_{\infty}}{\varepsilon}\sinh\left(\frac{ze\psi}{k_b T}\right) \quad (۴)$$

با تعریف شعاع بی‌بعد $r^* = r/D$، پارامتر دبای – هاکل[2] $k^2 = (2z^2e^2n_{\infty})/(\varepsilon k_b T)$ و پتانسیل الکتریکی بی‌بعد $\Psi = (ze\psi)/(k_b T)$، معادله پواسون - بولتزمن (۴)، را می‌توان به‌صورت زیر بازنویسی کرد.

$$\nabla^2\Psi = K^2\sinh(\Psi) \quad (۵)$$

که در آن، $K = kD$. اگر پتانسیل الکتریکی در مقایسه با انرژی حرارتی یون‌ها کوچک باشد، عبارت سمت راست در معادله (۵) را می‌توان با اولین جمله از سری تیلور تقریب زد. در تحقیقات، این روش تقریب خطی دبای - هاکل نامیده می‌شود. در دمای ۲۵ درجه سانتی‌گراد، این فرض خطی مستلزم آن است که ψ کوچک‌تر از ۲۵ میلی‌ولت باشد. این تقریب، معادله (۵) را به شکل زیر تبدیل می‌کند.

$$\nabla^2\Psi = K^2\Psi \quad (۶)$$

با استفاده از فرضیات در نظر گرفته شده، معادله فوق در دستگاه مختصات استوانه‌ای (شکل ۱)، به‌شکل زیر بیان می‌گردد.

$$\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial\Psi}{\partial r^*}\right) = K^2\Psi \quad (۷)$$

زمانی‌که لغزش در سطح مشترک محلول – میکروکانال رخ می‌دهد، بار تجمع یافته سطح دیواره به‌دلیل جذب یون‌های OH^- یا Cl^- رشد می‌یابد. از این‌رو در چنین شرایط لغزشی، پتانسیل زتا با پتانسیل زتای حالت عدم لغزش متفاوت خواهد بود و می‌توان آن را تابعی از طول لغزشی β ، و غلظت یون در نظر گرفت [۴۵]. چورائو و همکاران[3] [۴۶]، بر مبنای مشاهدات

[1] Stern layer
[2] Debye-Huckel Parameter
[3] Churaev et al.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

آزمایشگاهی خود در جریان محلول آب-پتاسیم کلرید، رابطه خطی $\zeta_\beta^* = \zeta^*(1+K\beta^*)$ را ارائه نمودند. یانگ و کوک[1] [۴۷] شکل اصلاح شده $\zeta_\beta^* = \zeta^*(1+K\beta^*)/f_m$ را با به‌کارگیری ضریب اصلاح f_m به‌منظور اجتناب از خطای تقریب خطی پیشنهاد دادند. تاندون و کربی[2] [۹] نیز یک رابطه غیرخطی را برای یک الکترولیت متقارن $z{:}\,z$ مطرح نمودند. بنابراین، بر مبنای مطالعات پیشین در این پژوهش از رابطه زیر برای تعیین پتانسیل زتای بی‌بعد شده لغزشی استفاده می‌گردد [۱۸].

$$\zeta_\beta^* = \zeta^*\left[1+\beta^* K\frac{\sinh(\zeta^*)}{\zeta^*}\right] \quad (۸)$$

که در آن، $\beta^* = \beta/D$ طول لغزشی بی‌بعد و $\zeta^* = \zeta/\psi_{ref}$ پتانسیل زتای بی‌بعد شده در شرایط عدم لغزش است.

باتوجه به تعریف شعاع بی‌بعد ($r^* = r/D$) که در آن D قطر میکروکانال است، دامنه تغییرات شعاع بعددار $0 \le r \le D/2$، و محدوده تغییرات شعاع بی‌بعد به صورت $0 \le r^* \le 0.5$ خواهد بود. بنابراین، شرایط مرزی حاکم بر توزیع پتانسیل الکتریکی $\Psi(r^*)$، معادله (۷) به‌صورت زیر است.

$$(\Psi)_{r^*=0.5} = \zeta_\beta^*, \qquad \left(\frac{\partial\Psi}{\partial r^*}\right)_{r^*=0} = 0 \quad (۹)$$

با استفاده از معادله (۷) و اعمال شرایط مرزی (۹)، توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد شده به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$\Psi(r^*) = \zeta_\beta^*\frac{I_0(Kr^*)}{I_0(0.5K)} \quad (۱۰)$$

که در آن، $\boldsymbol{I_0}$ تابع بسل اصلاح شده نوع اول مرتبه صفرم است.

۲-۲- میدان جریان

با توجه به دستگاه مختصات استوانه‌ای نشان داده شده در شکل (۱)، معادله بقای مومنتوم در راستای محور میکروکانال (راستای z) به‌صورت زیر است.

$$-\frac{dp}{dz} + \mu\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right] + \rho_e E_z = 0 \quad (۱۱)$$

که در آن، u_z سرعت محوری جریان، p فشار، μ لزجت دینامیکی سیال و $\rho_e E_z$ نیروی حجمی بر واحد حجم ناشی از عملکرد الکترواسموتیک است. از ترکیب رابطه فوق با معادله (۱)، نتیجه زیر حاصل می‌شود.

$$-\frac{1}{\mu}\frac{dp}{dz} + \left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u_z}{\partial r}\right)\right] - \frac{\varepsilon E_z}{\mu}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right)\right] = 0 \quad (۱۲)$$

با تعریف سرعت بی‌بعد به صورت $u_z^* = u_z/u_{HS}$، معادله (۱۲) به‌شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

$$\left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial u_z^*}{\partial r^*}\right)\right] + A + \left[\frac{1}{r^*}\frac{\partial}{\partial r^*}\left(r^*\frac{\partial \Psi}{\partial r^*}\right)\right] = 0 \quad (۱۳)$$

که، $A = -D^2\,(dp/dz)/(\mu u_{HS})$ پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار و $u_{HS} = -(\varepsilon E_z k_b T)/(ze\mu)$ سرعت هلمهوتز – اسمولوچوفسکی[3] می‌باشد. شرایط مرزی حاکم بر معادله حرکت به‌صورت زیر خواهد بود.

$$(u_z^*)_{r^*=0.5} = -\beta^*(du_z^*/dr^*)_{r^*=0.5}, \qquad \left(\frac{du_z^*}{dr^*}\right)_{r^*=0} = 0 \quad (۱۴)$$

تنش برشی دیواره میکروکانال به‌کمک رابطه زیر به‌دست می‌آید.

$$\tau_w = -\mu\left(\frac{du_z}{dr}\right)_{r=D/2} \quad (۱۵)$$

با تعریف ضریب اصطکاک پوسته‌ای به‌صورت $C_f = \tau_w/(\rho u_{HS}^2)$، رابطه فوق به‌شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

[1] Yang and Kwok
[2] Tandon ang Kirby
[3] Helmholtz-Smoluchowski

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

$$C_f = -\mathrm{Re}_{HS}^{-1}\left(\frac{du_z^*}{dr^*}\right)_{r^*=0.5} \quad (۱۶)$$

که در آن، $Re_{HS} = (\rho u_{HS} D)/\mu$ عدد رینولدز هلمهوتز – اسمولوچفسکی می‌باشد.

پارامتر موردنظر دیگری که مورد ارزیابی قرار می‌گیرد، نرخ حجمی جریان عبوری از میکروکانال است که به‌شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$Q = \int_0^{D/2} 2\pi r u_z dr \quad (۱۷)$$

با تعریف نرخ حجمی جریان بی‌بعد شده به صورت $Q^* = Q/Q_{ref}$ ، که در آن $Q_{ref} = \pi D^2 u_{HS}/4$، رابطه فوق به‌شکل زیر بازنویسی می‌گردد.

$$Q^* = 8\int_0^{0.5} r^* u_z^* dr^* \quad (۱۸)$$

با توجه به معادله (۱۳) و اعمال شرایط مرزی (۱۴)، پروفیل سرعت بی‌بعد به‌صورت زیر به‌دست می‌آید.

$$u_z^* = -\zeta_\beta^* \frac{I_0(Kr^*)}{I_0(0.5K)} - \frac{1}{4}Ar^{*2} + \beta^*\left(K\zeta_\beta^* \frac{I_1(0.5K)}{I_0(0.5K)} + 0.25A\right) + \zeta_\beta^* + 0.0625A \quad (۱۹)$$

بر همین اساس، ضریب اصطکاک پوسته‌ای و نرخ حجمی بی‌بعد جریان نیز به‌کمک روابط زیر تعیین می‌گردند.

$$C_f = \mathrm{Re}_{HS}^{-1}\left(K\zeta_\beta^* \frac{I_1(0.5K)}{I_0(0.5K)} + 0.25A\right) \quad (۲۰)$$

$$Q^* = \frac{8}{KI_0(0.5K)}\Big\{0.00390625\Big(32\beta^* K^2 \zeta_\beta^* I_1(0.5K) + 8A\beta^* K I_0(0.5K) + AKI_0(0.5K) + 32K\zeta_\beta^* I_0(0.5K) - 128\zeta_\beta^* I_1(0.5K)\Big)\Big\} \quad (۲۱)$$

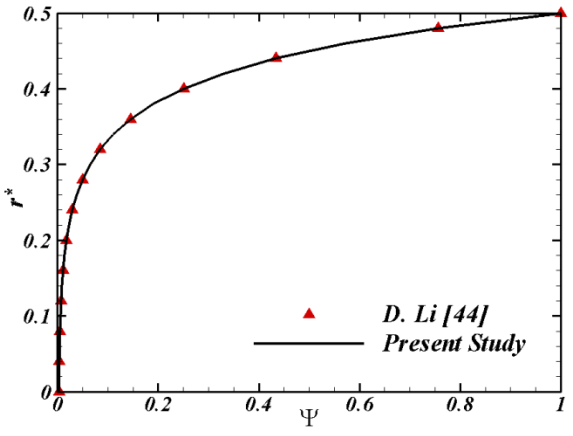
۳- صحت‌سنجی

پیش از بررسی نتایج تحلیلی مسأله پیش‌رو، به صحت‌سنجی پاسخ‌های به‌دست آمده پرداخته می‌شود. بدین منظور نخست در شکل (۲)، توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد $\Psi(r^*)$ در شرایط عدم لغزش ($\beta^* = 0$)، $\zeta^* = 1$ و $K = 15$ با نتایج لی [۴۴] در یک میکروکانال استوانه‌ای مقایسه شده است که نشان دهنده تطابق بسیار خوب بین این دو پاسخ می‌باشد. علاوه برآن، مقایسه‌ای بین پروفیل سرعت بی‌بعد مطالعه حاضر $u_z^*(r^*)$، در غیاب اثرات الکتروسینتیکی و عدم تشکیل دولایه الکتریکی ($\zeta^* = 0$) با حل مرسوم پروفیل سرعت سهموی جریان هاگن-پوازی[1] به ازای یک گرادیان فشار مشخص در شکل (۳) به تصویر کشیده شده است که حاکی از انطباق کامل است. در نهایت، پروفیل سرعت بی‌بعد و چگالی بار خالص موضعی ρ_e در جریان الکترواسموتیک خالص (غیاب گرادیان فشار) در شرایط $\zeta^* = 1$ و $K = 15$ برای محلول آبی KCl با غلظت 10^{-3} مولار با نتایج متناظر لی [۴۴] به‌ترتیب در شکل (۴) و (۵) مقایسه شده است. این مقایسه‌های صورت گرفته بین نتایج تحلیلی مطالعه حاضر با نتایج در دسترس موجود نشان دهنده صحت پاسخ به‌دست آمده و اعتبار آن در سایر شرایط حاکم بر مسأله می‌باشد.

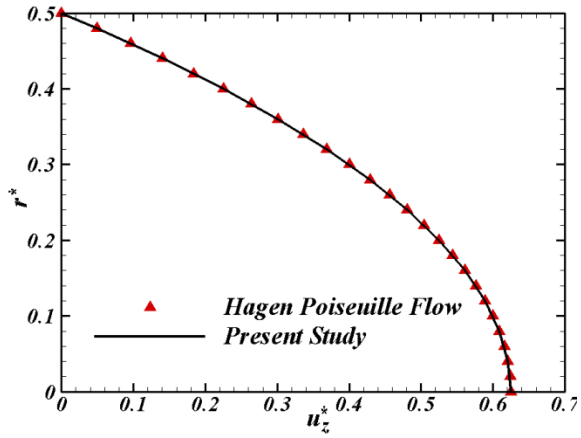
[1] Hagen-Poiseuille Flow

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

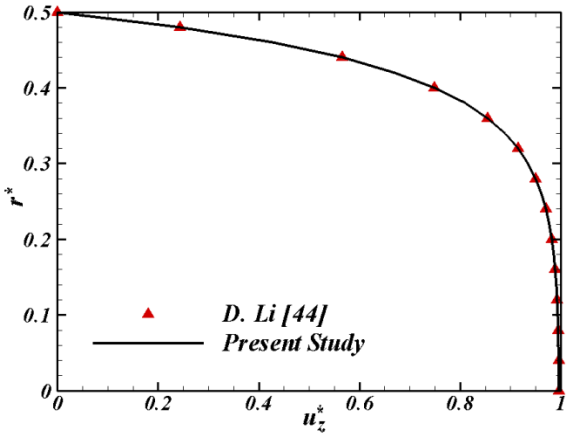
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



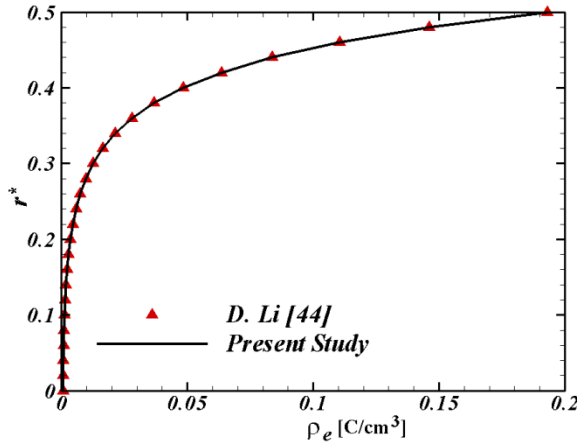
شکل ۲: مقایسه توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد Ψ مطالعه حاضر با نتایج تحلیلی لی [۴۴] به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$



شکل ۳: مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^* مطالعه حاضر با پروفیل سرعت بی‌بعد جریان هاگن-پوازی به ازای $A = 1$



شکل ۴: مقایسه پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^* مطالعه حاضر با نتایج تحلیلی لی [۴۴] به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$



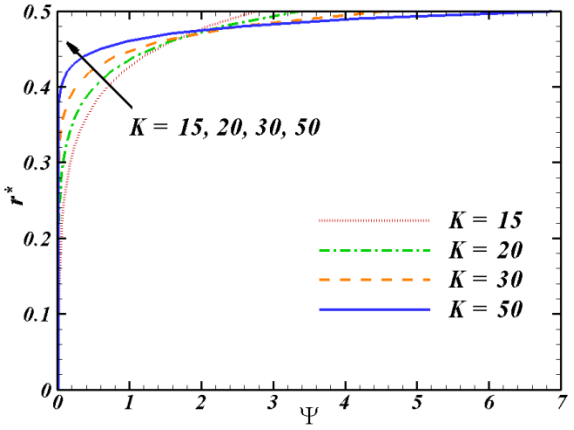
شکل ۵: مقایسه چگالی بار خالص ρ_e مطالعه حاضر با نتایج تحلیلی لی [۴۴] به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$ در محلول KCl با غلظت مولار $M = 10^{-3}$

۴- نتایج و بحث

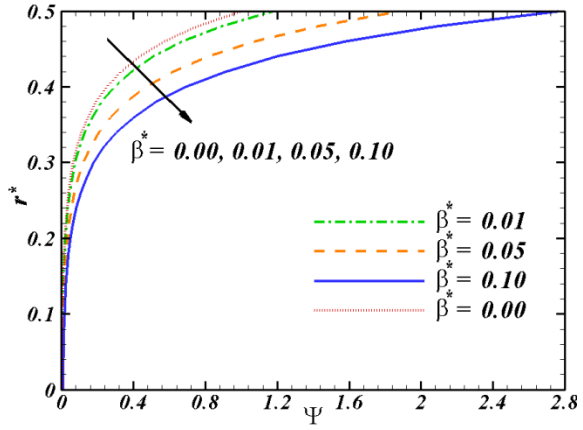
پارامترهای مهم و تأثیرگذار بر توزیع پتانسیل الکتریکی درون دولایه الکتریکی و میدان جریان عبوری از میکروکانال شامل پارامتر دبای، پارامتر لغزش، پارامتر گرادیان فشار و پتانسیل زتا می‌باشند که در ادامه اثر هریک از عوامل به‌صورت مجزا ارائه و تفسیر شده است. تغییرات توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد بر اثر پارامتر دبای، پارامتر لغزش و پتانسیل زتا به‌ترتیب در شکل‌های (۶)، (۷) و (۸) نشان داده شده است. طبق انتظار، افزایش پارامتر دبای موجب نازک‌تر شدن ضخامت دولایه الکتریکی (یا افزایش نسبت قطر میکروکانال به ضخامت دولایه الکتریکی) می‌گردد. افزایش لغزش سطحی علاوه بر افزایش پتانسیل الکتریکی موجب ضخیم‌تر شدن دولایه الکتریکی نیز شده است. روند مشابهی نیز در مورد رشد پتانسیل زتای سطح دیواره میکروکانال قابل مشاهده است. لازم به‌ذکر است به دلیل اعمال پتانسیل زتای وابسته به لغزش، با وجود رشد پتانسیل الکتریکی نسبت به پتانسیل زتا، انحرافی بین مقادیر پتانسیل زتا و پتانسیل حقیقی سطح جامد شکل گرفته است.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

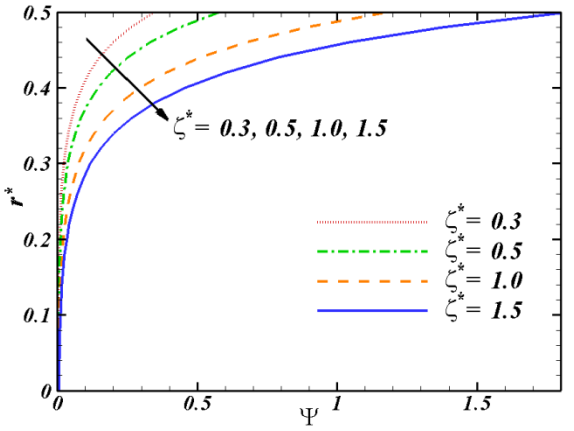
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



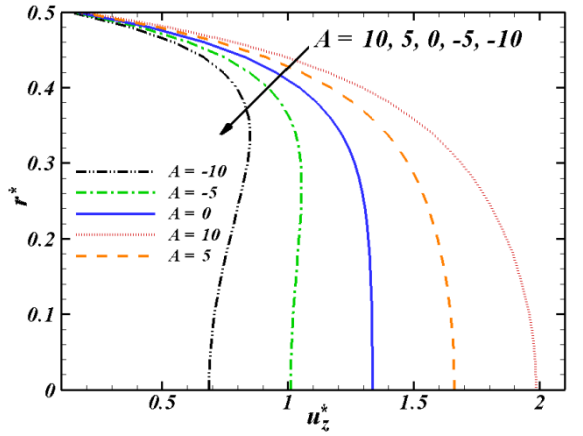
شکل ۶: تأثیر پارامتر دبای K بر توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد Ψ، به ازای $\zeta^* = 1$ و $\beta^* = 0.1$



شکل ۷: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد Ψ، به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$



شکل ۸: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد Ψ، به ازای $K = 15$ و $\beta^* = 0.01$

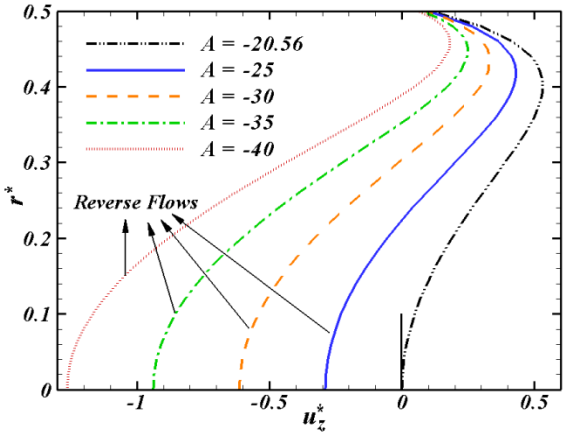


شکل ۹: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^*، به ازای $\zeta^* = 1$، $\beta^* = 0.01$ و $K = 15$

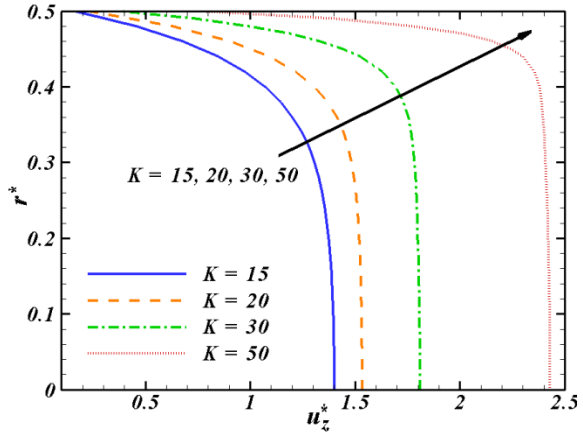
شکل (۹) پروفیل توزیع سرعت بی‌بعد u_z^* را به ازای مقادیر مختلف پارامتر گرادیان فشار A نشان می‌دهد. مقدار پارامتر بی‌بعد دبای K، معادل ۱۵ در نظر گرفته شده است. این بدین معناست که دولایه الکتریکی به بخش کوچکی در مجاورت دیواره میکروکانال محدود شده و بخش قابل ملاحظه‌ای از مجرای کانال خارج از ناحیه دولایه الکتریکی قرار می‌گیرد. بنابراین با رشد پارامتر گرادیان فشار، میدان جریان به سمت جریان پوازی سوق پیدا خواهد کرد و جریان الکتروسموتیک خالص متناظر با حالت $A = 0$ مشخص می‌گردد. اعمال گرادیان فشار موافق ($A > 0$) موجب می‌شود که بیشینه سرعت جریان در مرکز میکروکانال (که از مشخصات جریان پوازی است) و گرادیان شدید سرعت در دیواره (که از مشخصات جریان الکتروسموتیک است) پدیدار شود، این در حالی است که گرادیان فشار مخالف ($A < 0$) موجب می‌گردد محل سرعت بیشینه در موقعیتی نزدیک دیواره ایجاد و یک کمینه نسبی سرعت در مرکز میکروکانال (ناشی از گرادیان فشار مخالف) مشاهده گردد. اعمال گرادیان فشارهای مخالف قوی‌تر حتی ممکن است موجب شکل‌گیری جریان‌های بازگشتی در وسط میکروکانال شود. آستانه شروع جریان‌های بازگشتی متناظر با پارامتر گرادیان فشار $A = -20.56$، بوده است. پروفیل‌های سرعت چند حالت مختلف شامل جریان بازگشتی در شکل (۱۰) به تصویر کشیده شده است.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

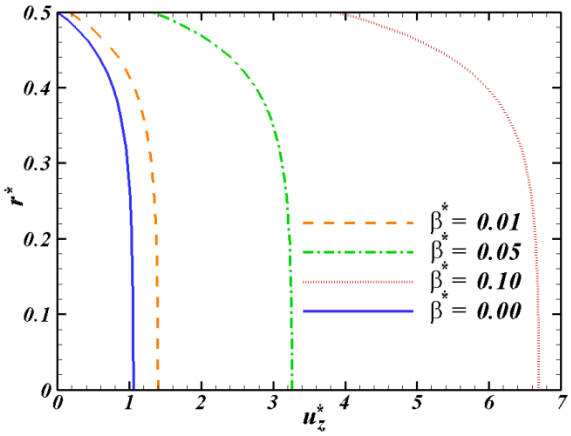
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



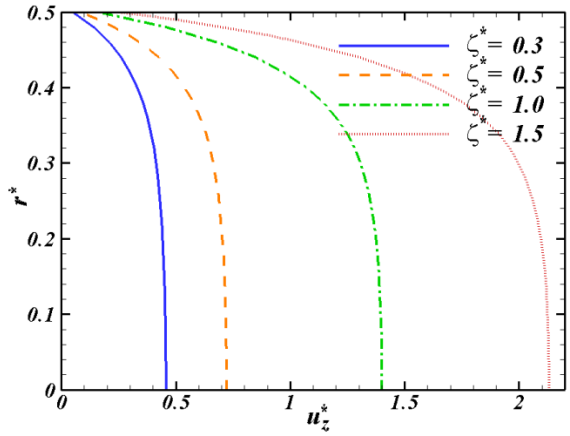
شکل ۱۰: شکل‌گیری جریان‌های بازگشتی در مرکز کانال به ازای گرادیان فشارهای معکوس قوی در $\zeta^* = 1$، $\beta^* = 0.01$ و $K = 15$



شکل ۱۱: تأثیر پارامتر دبای K بر پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^*، به ازای $\zeta^* = 1$، $\beta^* = 0.01$ و $A = 1$



شکل ۱۲: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^*، به ازای $\zeta^* = 1$، $K = 15$ و $A = 1$



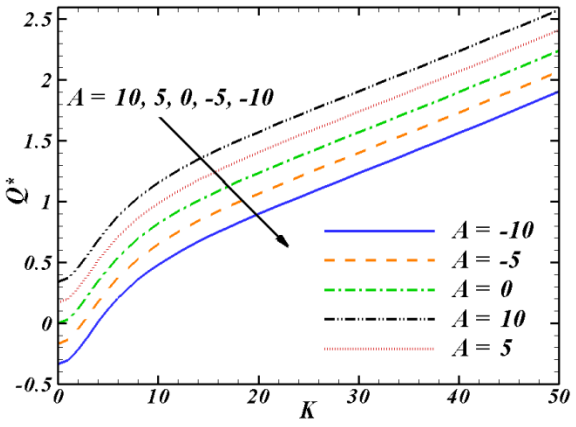
شکل ۱۳: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر پروفیل سرعت بی‌بعد u_z^*، به ازای $A = 1$، $\beta^* = 0.01$ و $K = 15$

اثر پارامترهای بی‌بعد دبای K، لغزش β^* و پتانسیل زتا ζ^* بر میدان سرعت جریان به ترتیب در شکل‌های (۱۱)، (۱۲) و (۱۳) ارائه شده است. رشد پارامتر دبای به معنای نازک‌تر شدن دولایه الکتریکی است، در نتیجه توزیع سرعت جریان در خارج از آن به سمت پروفیل تخت الکترواسموتیک سوق پیدا می‌کند. افزایش طول لغزشی موجب شکل‌گیری لغزش بیش‌تر سرعت در مرز جامد و در نتیجه در مرکز میکروکانال می‌شود. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، پارامتر لغزش تأثیر بسیار قابل توجهی بر میدان جریان داشته و در محدوده مطالعه شده تا حدود ۷ برابر سرعت بیشینه را ارتقاء داده است. روند مشابهی بر اثر رشد پتانسیل زتا در میدان سرعت مشاهده می‌شود با این تفاوت که از آن‌جایی‌که پتانسیل زتا به‌صورت غیرمستقیم (از طریق پتانسیل سطح جامد) در سرعت لغزشی دیواره اثر گذار است، لذا تأثیر این پارامتر بر سرعت نقاط دورتر از دیواره بیش‌تر بوده است. علی‌رغم پارامتر لغزش، پتانسیل زتا اثر بسیار چشم‌گیرتری بر گرادیان سرعت مرز داشته و سبب افزایش آن شده است.

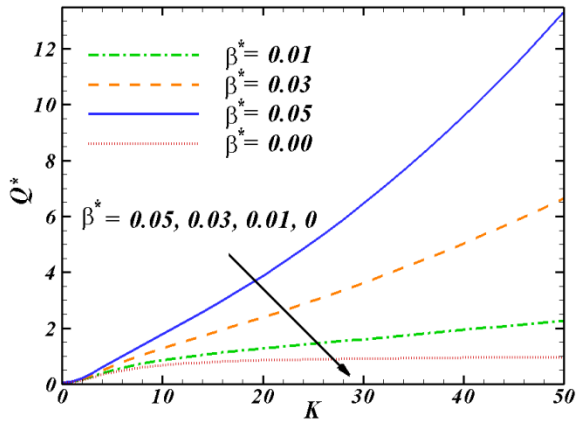
تغییرات نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، در برابر پارامتر بی‌بعد دبای K به ازای مقادیر مختلف پارامتر گرادیان فشار A، لغزش β^* و پتانسیل زتا ζ^* در شکل‌های (۱۴)، (۱۵) و (۱۶) نشان داده شده است. طبق انتظار، گرادیان فشار موافق نرخ حجمی جریان را افزایش و گرادیان فشار مخالف آن را کاهش می‌دهد. افزایش دبی حجمی بر اثر افزایش پتانسیل زتا (به‌دلیل تقویت اثرات جریان الکترواسموتیک) و رشد جهشی آن بر اثر افزایش لغزش سطحی به وضوح قابل مشاهده است.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

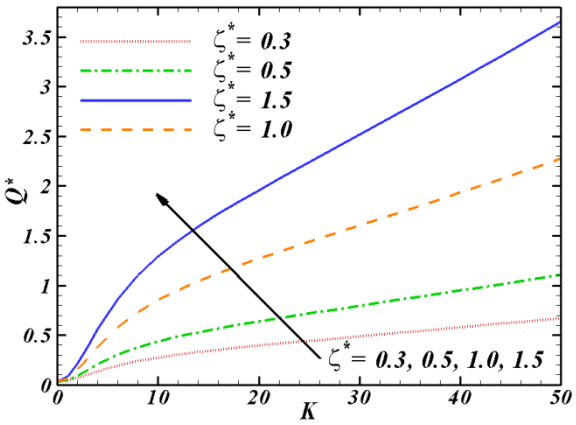
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



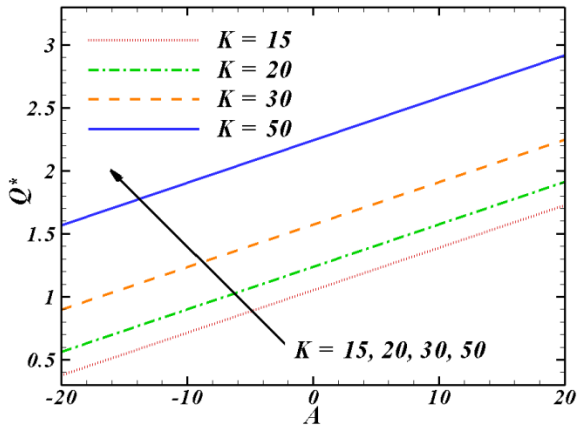
شکل ۱۴: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\zeta^* = 1$ و $\beta^* = 0.01$



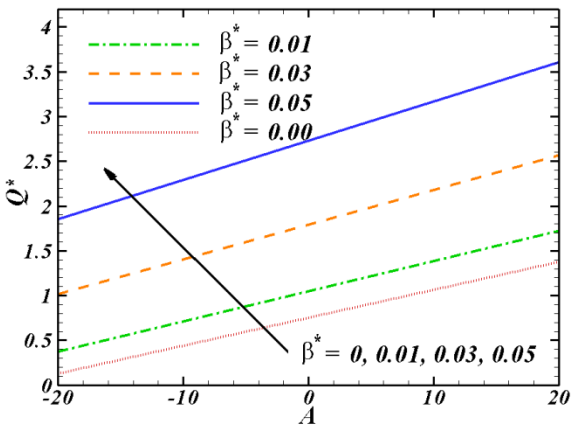
شکل ۱۵: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\zeta^* = 1$ و $A = 1$



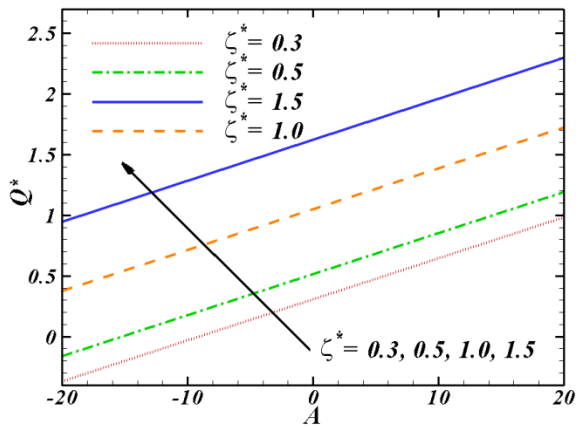
شکل ۱۶: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $A = 1$



شکل ۱۷: تأثیر پارامتر دبای K بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $\zeta^* = 1$



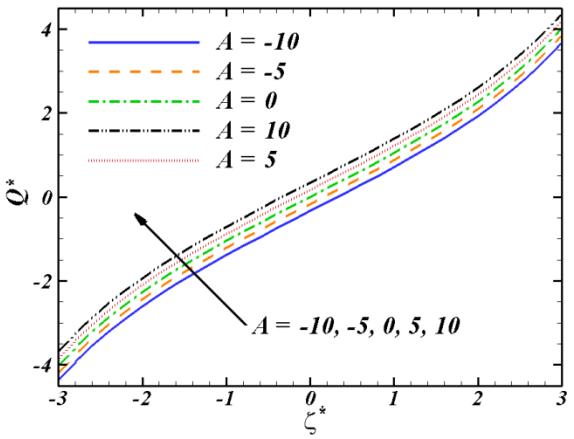
شکل ۱۸: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$



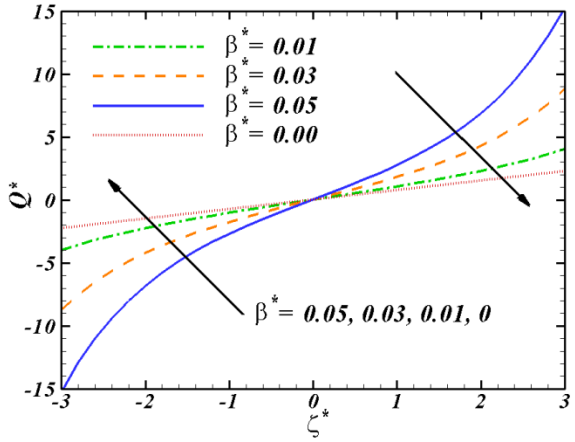
شکل ۱۹: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $K = 15$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

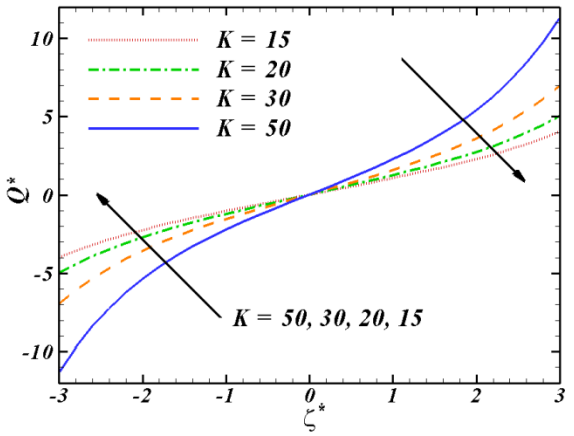
تغییرات نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، در برابر پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار A به ازای مقادیر مختلف پارامتر دبای، لغزش و پتانسیل زتا در شکل‌های (۱۷)، (۱۸) و (۱۹) ارائه شده است. همان‌طور که ملاحظه می‌گردد، تغییرات دبی حجمی نسبت به پارامتر گرادیان فشار به‌صورت خطی بوده است. علاوه بر آن مطابق نتایج پیشین، رشد نرخ حجمی جریان به ازای افزایش هر سه پارامتر در نظر گرفته شده در این شکل‌ها نیز به وضوح قابل مشاهده است. به‌طور مشابه، شکل‌های (۲۰) الی (۲۲) نیز نشان دهنده روند تغییرات نرخ حجمی جریان در برابر پتانسیل زتای بی‌بعد سطح می‌باشند. تغییر علامت پتانسیل زتای سطح به‌معنای تغییر علامت بارهای الکتریکی تجمع یافته در سطح جامد و در نتیجه تغییر بار الکتریکی یون‌های شناور در لایه دیفیوز دولایه الکتریکی است. بنابراین فارغ از حضور گرادیان فشار، جهت‌گیری این یون‌ها در معرض یک میدان الکتریکی یکسان متفاوت خواهد بود. به‌عبارت دیگر در جریان الکترواسموتیک خالص ($A = 0$)، دبی عبوری متناظر با پتانسیل زتای $\zeta^* = 0$ معادل $Q^* = 0$ بوده و نمودار نسبت به این نقطه قرینه است. در نهایت تغییرات نرخ حجمی جریان در برابر پارامتر بی‌بعد لغزش در شکل‌های (۲۳) الی (۲۵) به تصویر کشیده شده است. اثر طول لغزشی بر دبی حجمی جریان به ازای مقادیر بزرگ‌تر پارامتر بی‌بعد دبای و پتانسیل زتا بیش‌تر بوده است. به‌عبارت دیگر لغزش هیدرودینامیکی مرز جامد در دولایه‌های الکتریکی نازک‌تر و پتانسیل‌های قوی‌تر سبب رشد هرچه بیش‌تر نرخ جریان عبوری از میکروکانال می‌گردد.



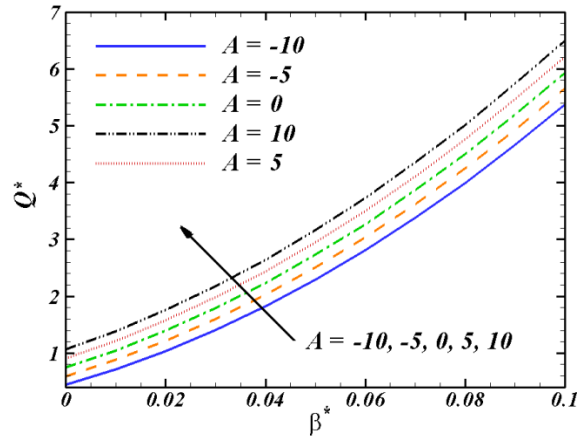
شکل ۲۰: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $K = 15$



شکل ۲۱: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $A = 1$ و $K = 15$



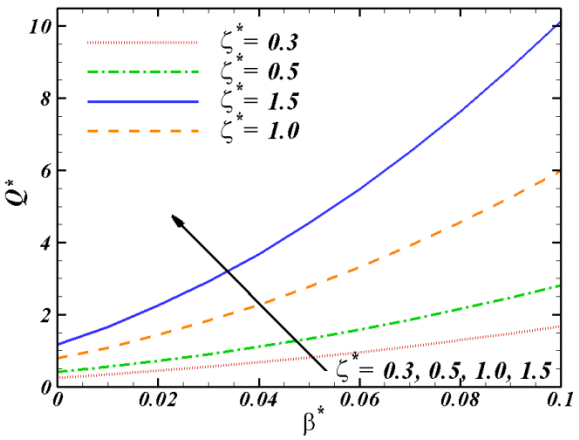
شکل ۲۲: تأثیر پارامتر دبای K بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $A = 1$



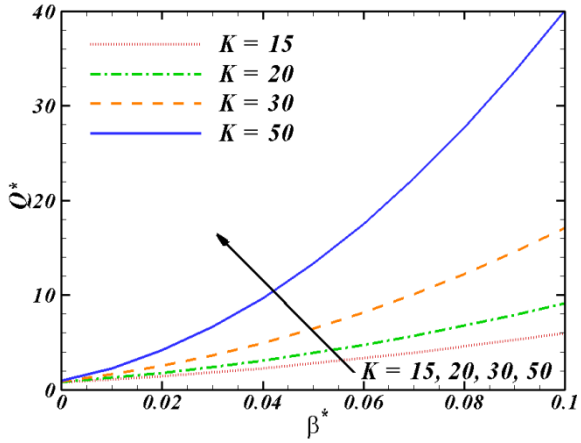
شکل ۲۳: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $\zeta^* = 1$ و $K = 15$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

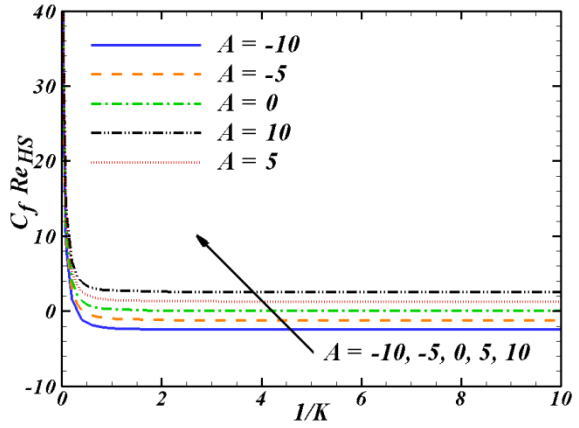
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



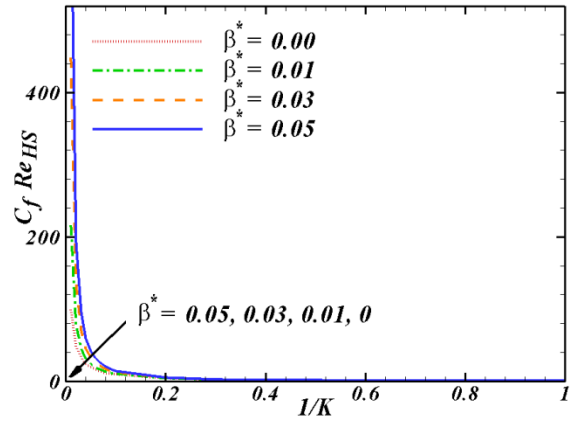
شکل ۲۴: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $A = 1$ و $K = 15$



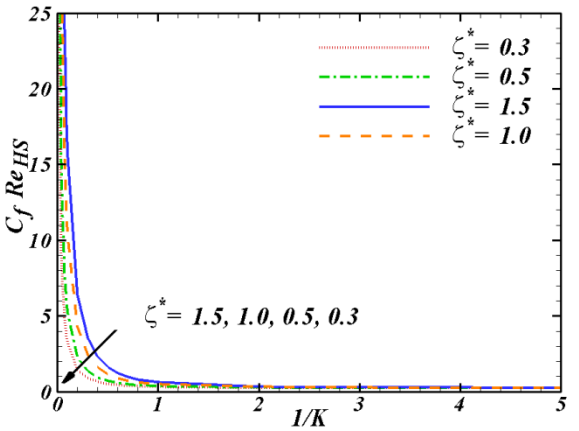
شکل ۲۵: تأثیر پارامتر دبای K بر نرخ حجمی بی‌بعد جریان Q^*، به ازای $A = 1$ و $\zeta^* = 1$



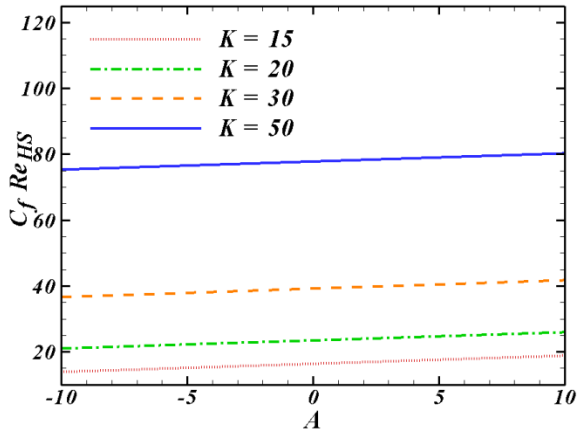
شکل ۲۶: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $\zeta^* = 1$



شکل ۲۷: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $A = \zeta^* = 1$ و 1



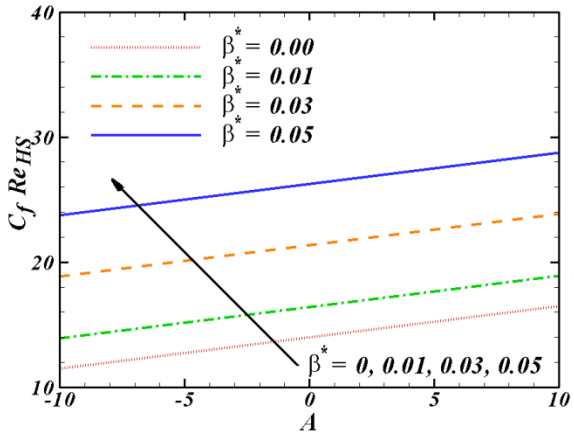
شکل ۲۸: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $A = 1$ و $\beta^* = 0.01$



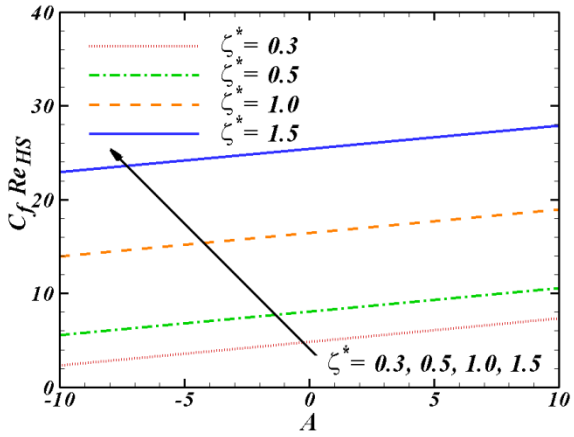
شکل ۲۹: تأثیر پارامتر دبای K بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $\zeta^* = 1$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

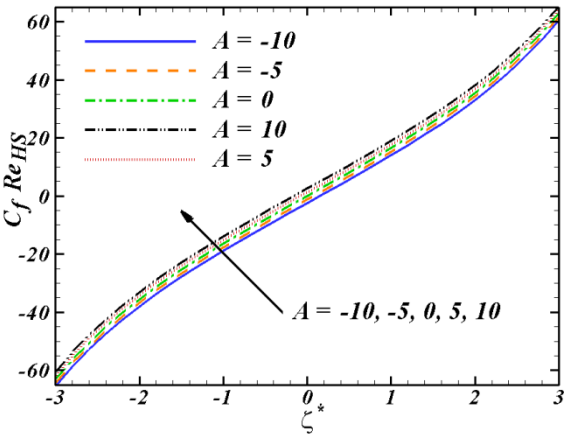
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



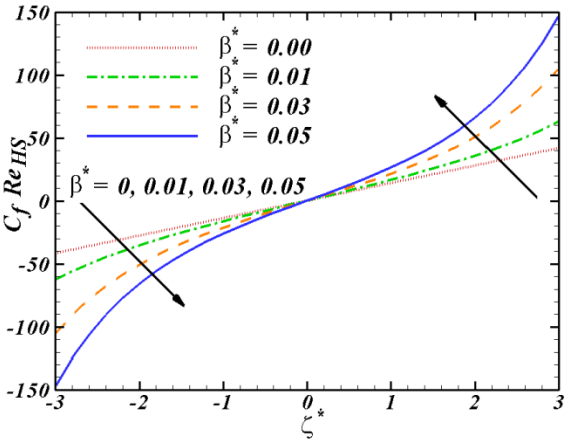
شکل ۳۰: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $K = 15$ و $\zeta^* = 1$



شکل ۳۱: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $K = 15$ و $\beta^* = 0.01$



شکل ۳۲: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $K = 15$ و $\beta^* = 0.01$

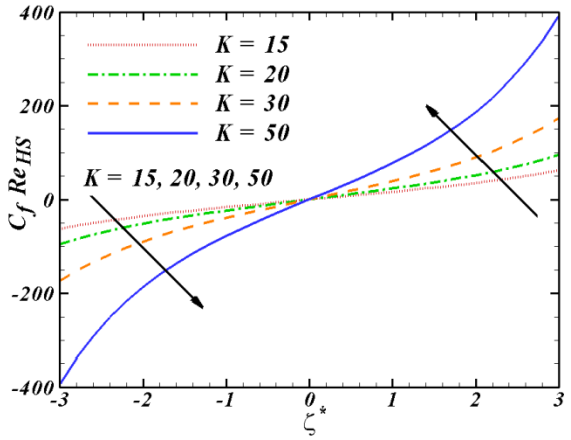


شکل ۳۳: تأثیر پارامتر لغزش β^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $A = 1$ و $K = 15$

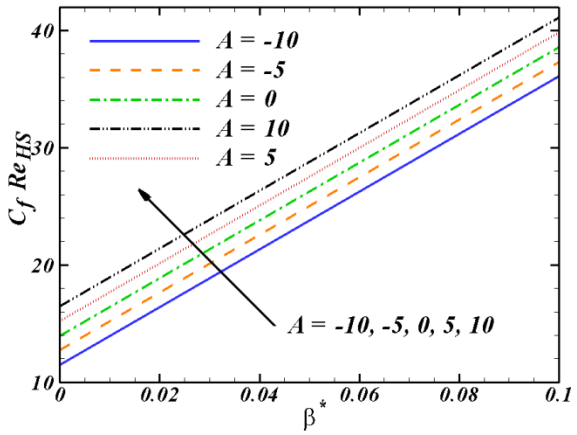
اثر پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار A، پارامتر بی‌بعد لغزش β^* و پارامتر بی‌بعد پتانسیل زتا ζ^* بر عبارت $C_f Re_{HS}$ به ازای تابعی از معکوس پارامتر بی‌بعد دبای $1/K$، به ترتیب در شکل‌های (۲۶)، (۲۷) و (۲۸) نمایش داده شده است. همان‌طور که در هر سه نمودار ملاحظه می‌گردد، عبارت ضریب اصطکاک به ازای دولایه‌های بسیار ضخیم به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند این در حالی است که با نازک‌تر شدن ضخامت دولایه ضریب اصطکاک رشد بسیار زیادی را تجربه می‌کند. علت این پدیده را می‌توان در شکل‌گیری گرادیان‌های بسیار قوی سرعت در مرز جامد برای دولایه‌های الکتریکی بسیار نازک جستجو کرد. علاوه بر آن، همان‌طور که پیش‌تر در توضیح نتایج شکل (۹) و (۱۰) نیز تفسیر شد، اعمال گرادیان فشار مخالف از شدت گرادیان سرعت (و در نتیجه تنش برشی دیواره و ضریب اصطکاک) می‌کاهد و حتی ممکن است در مقادیر کوچک‌تر پارامتر دبای (دولایه‌های ضخیم‌تر) سبب تغییر علامت (جهت) تنش برشی دیواره و ضریب اصطکاک شود اگرچه این تأثیر در دولایه‌های الکتریکی نازک‌تر نازل‌تر است. رشد طول لغزشی و پتانسیل زتا نیز هر دو موجب افزایش ضریب اصطکاک شده ولی اثر طول لغزشی نسبت به پارامتر دیگر کم‌تر بوده است. تابعیت عبارت بی‌بعد $C_f Re_{HS}$ بر حسب پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار A به ازای تغییرات سایر پارامترها در شکل‌های (۲۹)، (۳۰) و (۳۱) به تصویر کشیده شده است. به‌طور مشابه با نرخ حجمی جریان، این تابعیت نسبت به گرادیان فشار به‌صورت خطی با شیب‌های برابر مشاهده گردیده است.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

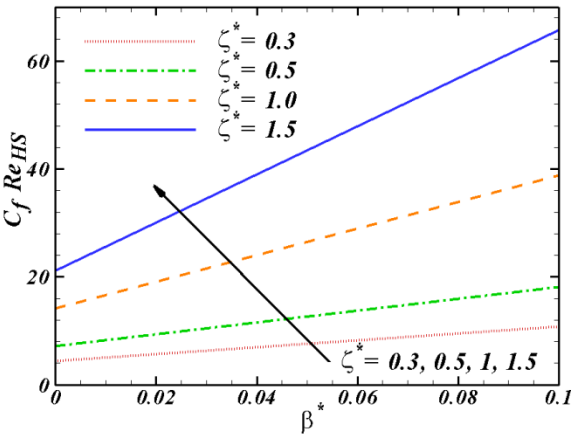
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]



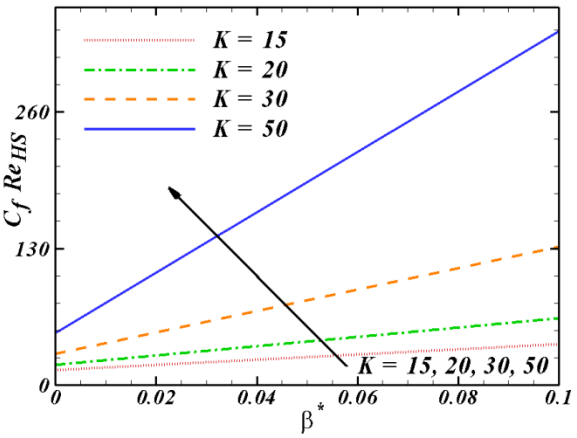
شکل ۳۴: تأثیر پارامتر دبای K بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $\beta^* = 0.01$ و $A = 1$



شکل ۳۵: تأثیر پارامتر گرادیان فشار A بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $K = 15$ و $\zeta^* = 1$



شکل ۳۶: تأثیر پتانسیل زتا ζ^* بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $K = 15$ و $A = 1$



شکل ۳۷: تأثیر پارامتر دبای K بر $C_f Re_{HS}$، به ازای $\zeta^* = 1$ و $A = 1$

تغییرات عبارت ضریب اصطکاک پوسته‌ای بر حسب تابعی از پتانسیل زتای بی‌بعد شده به ازای مقادیر مختلف سایر پارامترها در شکل‌های (۳۲) الی (۳۴) نشان داده شده است. همان‌گونه که پیش‌تر تشریح گردید، تغییر علامت پتانسیل زتا به معنای تغییر علامت بار الکتریکی یون‌های شناور در لایه دیفیوز دولایه الکتریکی بوده و منتج به جهت‌گیری مخالف آن‌ها تحت تأثیر میدان الکتریکی اعمال شده ثابت است. از این‌رو با وقوع جریان در جهت مخالف، علامت تنش برشی و در نتیجه ضریب اصطکاک نیز تغییر خواهد نمود. شایان ذکر است افزایش هر دو پارامتر لغزش و دبای سبب افزایش قدرمطلق ضریب اصطکاک می‌گردد در حالی‌که طبق انتظار تمام منحنی‌ها در نقطه متناظر با $\zeta^* = 0$ (غیاب هرگونه اثرات الکتروسینتیکی) همگرا شده که به‌معنای استقلال ضریب اصطکاک از لغزش هیدرودینامیکی و ضخامت دولایه الکتریکی است. در خاتمه، شکل‌های (۳۵) الی (۳۷) نشان دهنده تابعیت عبارت ضریب اصطکاک بر حسب پارامتر بی‌بعد لغزش هستند. باتوجه به روابط (۸) و (۲۰)، تغییرات عبارت ضریب اصطکاک نسبت به پارامتر بی‌بعد لغزش به‌صورت خطی است. در یک سطح مشترک آب‌گریز، لغزش و بار سطحی وابسته به ساختار مولکولی یا فوق مولکولی آب است. با افزایش لغزش، ربایش و جذب یون‌های OH^- یا Cl^- افزایش یافته و در نتیجه بار سطحی و پتانسیل زتا زیاد می‌شود [۹ و ۲۴]. مطابق رابطه (۱۹)، افزایش پتانسیل زتای بی‌بعد موجب رشد سرعت

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]
[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

الکترواسموتیک، گرادیان سرعت و در نهایت افزایش ضریب اصطکاک می‌شود. علاوه بر این، رشد پتانسیل زتا و پارامتر دبای سبب افزایش شیب منحنی عبارت ضریب اصطکاک بر حسب β^* بوده است.

۵- نتیجه‌گیری

در این پژوهش، میدان پتانسیل و جریان کاملاً توسعه یافته مرکب الکترواسموتیک و فشار محرک یک محلول آبی با فرض لغزش سطحی و پتانسیل زتای وابسته به لغزش در میکروکانال‌های استوانه‌ای مطالعه شده است. عبارت‌های تحلیلی برای توزیع پتانسیل الکتریکی بی‌بعد ($\Psi(r^*)$)، توزیع سرعت بی‌بعد ($u_z^*(r^*)$)، نرخ حجمی جریان بی‌بعد (Q^*) و عبارت ضریب اصطکاک ($C_f Re_{HS}$) استخراج شده است. این مسأله متأثر از چهار پارامتر: گرادیان فشار A، دبای K، لغزش β^* و پتانسیل زتا ζ^* بوده است که در محدوده وسیعی مورد مطالعه و ارزیابی قرار گرفته است. اهم نتایج به‌دست آمده از این تحقیق را می‌توان در قالب موارد ذیل خلاصه نمود:

- افزایش پارامتر بی‌بعد لغزش β^* و پارامتر بی‌بعد پتانسیل زتا ζ^* موجب افزایش پتانسیل الکتریکی بی‌بعد Ψ در دولایه الکتریکی و ضخیم‌تر شدن آن می‌گردد.
- با اعمال گرادیان فشار موافق ($A > 0$) جریان تقویت شده و بیشینه سرعت در مرکز میکروکانال رخ می‌دهد در حالی‌که اعمال گرادیان فشار مخالف ($A < 0$) جریان را تضعیف کرده و سبب جابه‌جایی محل سرعت بیشینه به سمت دیواره می‌شود.
- پروفیل توزیع سرعت جریان به ازای پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار $A = -20.56$ در آستانه شکل‌گیری جریان بازگشتی قرار می‌گیرد.
- پارامتر لغزشی تأثیر بسیار چشم‌گیری بر میدان جریان می‌گذارد به‌طوری‌که رشد آن در محدوده مورد مطالعه (از ۰ تا ۰/۱)، مقدار سرعت بیشینه را تا حدود ۷ برابر ارتقاء داده است.
- دولایه‌های الکتریکی نازک با پروفیل سرعت تخت در مرکز کانال و گرادیان شدید سرعت در دیواره همراه‌اند.
- پتانسیل زتای وابسته به لغزش و رشد آن سبب افزایش شدید نرخ حجمی جریان خصوصاً در مورد دولایه‌های الکتریکی با ضخامت نازک‌تر می‌شود.
- به ازای مقادیر ثابت سایر پارامترها، تغییرات نرخ حجمی جریان نسبت به گرادیان فشار خطی است.
- با عنایت به علامت پتانسیل زتا و بار الکتریکی یون‌های شناور در لایه دیفیوز دولایه الکتریکی، افزایش طول لغزشی و پارامتر دبای موجب افزایش چشمگیر مقدار دبی عبوری جریان می‌گردد. در حالی‌که در غیاب اثرات الکتروسینتیکی ($\zeta^* = 0$)، دبی مستقل از هر پارامتر دیگری است.
- صرف نظر از جهت جریان، با افزایش ضخامت دولایه الکتریکی ($1/K$)، ضریب اصطکاک پوسته‌ای ($C_f Re_{HS}$) به سمت مقدار ثابتی میل می‌کند که این مقدار ثابت فقط به گرادیان فشار وابسته است و در گرادیان فشار موافق بیش‌تر از مخالف است.
- مشابه نرخ حجمی جریان، عبارت ضریب اصطکاک نیز تابعی خطی از پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار است.
- با عنایت به علامت پتانسیل زتا و بار الکتریکی یون‌های شناور در لایه دیفیوز دولایه الکتریکی، افزایش طول لغزشی و پارامتر دبای موجب افزایش چشم‌گیر ضریب اصطکاک می‌گردد. درحالی‌که در غیاب اثرات الکتروسینتیکی ($\zeta^* = 0$)، ضریب اصطکاک مستقل از هر پارامتر دیگری است.
- تغییرات عبارت ضریب اصطکاک $C_f Re_{HS}$ بر حسب پارامتر بی‌بعد لغزش β^* به‌صورت خطی با شیب ثابت بر حسب گرادیان فشار ولی با شیب متغیر بر حسب پارامتر پتانسیل زتا و پارامتر دبای است. به‌عبارت دیگر رشد پتانسیل زتا و پارامتر دبای سبب افزایش شیب منحنی عبارت ضریب اصطکاک بر حسب β^* می‌گردد و در شرایط دولایه‌های الکتریکی ضخیم‌تر با پتانسیل زتای کوچک‌تر، ضریب اصطکاک تقریباً مستقل از پارامتر لغزشی عمل نموده و به سمت مقدار ثابت میل می‌کند.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

فهرست علائم

علائم انگلیسی		علائم یونانی	
A	پارامتر بی‌بعد گرادیان فشار	β	طول لغزشی، m
C_f	ضریب اصطکاک پوسته‌ای	ε	ثابت دی الکتریک، $\mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$
D	قطر میکروکانال، m	ζ	پتانسیل زتای دیواره، V
e	بار الکترون، C	μ	ویسکوزیته دینامیکی، $\mathrm{kg\,m^{-1}\,s^{-1}}$
E_z	میدان الکتریکی در راستای محوری، $\mathrm{V\,m^{-1}}$	ρ	چگالی، $\mathrm{kg\,m^{-3}}$
k	پارامتر دبای – هاکل، $\mathrm{m^{-1}}$	ρ_e	چگالی بار الکتریکی خالص، $\mathrm{C\,m^{-3}}$
K	پارامتر بی‌بعد دبای – هاکل	τ	تنش برشی، Pa
k_b	ثابت بولتزمن، $\mathrm{J\,K^{-1}}$	ψ	پتانسیل الکتریکی، V
n	غلظت عددی یون، $\mathrm{m^{-3}}$	Ψ	پتانسیل الکتریکی بی بعد
p	فشار، Pa	β	طول لغزشی، m
Q	دبی حجمی جریان، $\mathrm{m^3\,s^{-1}}$	ε	ثابت دی الکتریک، $\mathrm{C\,V^{-1}\,m^{-1}}$
r	مؤلفه شعاعی، m	زیرنویس	
Re	عدد رینولدز	HS	هلمهوتز-اسمولوچفسکی
T	درجه حرارت، K	ref	مقدار مرجع
u	سرعت جریان، $\mathrm{m\,s^{-1}}$	s	لغزش
z	مؤلفه محوری، m	w	دیواره
z	ظرفیت والانس یون‌ها در محلول	بالانویس	
		$*$	کمیت بی بعد

مراجع

[1] Z. Wang, B., Li, Q.Q., Luo, W., Zhao, Effect of wall roughness by the bionic structure of dragonfly wing on microfluid flow and heat transfer characteristics, International Journal of Heat and Mass Transfer, 173 (2021) 121201.

[2] S.K. Mehta, S., Pati, P.K., Mondal, Numerical study of the vortex induced electroosmotic mixing of non-Newtonian biofluids in a non-uniformly charged wavy microchannel: Effect of finite ion size, Electrophoresis, (2021) doi:10.1002/elps.202000225.

[3] S. Movahed, R., Kamali, M., Eghtesad, A., Khosravifard, Analytical study of mixed electroosmotic-pressure-driven flow in rectangular microchannels, Theoretical and Computational Fluid Dynamics, 27 (2013) 599-616.

[4] S. Pabi, S.K., Mehta, S., Pati, Effect of slip on vortex formation near two-part cylinder with same sign zeta potential in a plane microchannel, Springer, Cham, (2020) 1013-1022.

[5] J.C. Misra, G.C., Shit, S., Chandra, P.K., Kundu, Electro-osmotic flow of a viscoelastic fluid in a channel: Applications to physiological fluid mechanics, Applied Mathematics and Computation, 217 (2011) 7932-7939.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

[6] G. Zhao, Z., Wang, Y., Jian, Heat transfer of the MHD nanofluid in microtubes under the electrokinetic effects, International Journal of Heat and Mass Transfer, 130 (2019) 821-830.

[7] W. Zhang, Q., Wang, M., Zeng, C., Zhao, Thermoelectric effect and temperature-gradient-driven electrokinetic flow of electrolyte solutions in charged nanocapillaries, International Journal of Heat and Mass Transfer, 143 (2019) 118569.

[8] D. Jing, Y., Pan, X., Wang, The non-monotonic overlappling EDL-induced electroviscous effect with surface charge-dependent slip and its size dependence, International Journal of Heat and Mass Transfer, 113 (2017) 32-39.

[9] V. Tandon, B.J., Kirby, Zeta potential and electroosmotic mobility in microfluidic devices fabricated from hydrophobic polymers: 2. Slip and interfacial water structure, Electrophoresis, 29 (2008) 1102-1114.

[10] J. Jamaati, H., Niazmand, M., Renksizbulut, Pressure-driven electrokinetic slip-flow in planar microchannels, International Journal of Thermal Science, 49 (2010) 1165-1174.

[11] C.Y. Soong, P.W., Hwang, J.C., Wang, Analysis of pressure-driven electrokinetic flows in hydrophobic microchannels with slip-dependent zeta potential, Microfluid. Nanofluid, 9 (2010) 211-223.

[12] R.J. Yang, L. M., Fu, C.C., Hwang, Electroosmotic entry flow in a microchannel, Journal of Colloid and Interfacial Sciences, 244 (2001) 173-179.

[13] L. Joly, C., Ybert, E., Trizac, L., Bocquet, Liquid friction on charged surfaces: from hydrodynamic slippage to electrokinetics, Journal of Chemical Physics, 125 (2006) 204716.

[14] Z. Ding, Y., Jian, L., Yang, Time periodic electroosmotic flow of micropolar fluids through microparallel channel, Applied Mathematics and Mechanics, 37 (2016) 769-786.

[15] A.I. Khan, P., Dutta, Analytical solution of time-periodic electroosmotic flow through cylindrical microchannel with non-uniform surface potential, Micromachines, 10 (8) (2019) 498.

[16] S. Deng, T., Xiao, C., Liang, Analytical study of unsteady two-layer combined electroosmotic and pressure-driven flow through a cylindrical microchannel with slip-dependent zeta potential, Chemical Engineering Science, 283 (2024) 119327.

[17] N.A. Gatsonis, W.G., Al-Kouz, R.E., Chamberlin, Investigation of rarefied supersonic flows into rectangular nanochannels using a three-dimensional direct simulation Monte Carlo method, Physics of Fluids, 22 (3) (2010) 032001.

[18] D. Banerjee, S.K., Mehta, S., Pati, P., Biswas, Analytical solution to heat transfer for mixed electroosmotic and pressure-driven flow through a microchannel with slip-dependent zeta potential, International Journal of Heat and Mass Transfer, 181 (2021) 121989.

[19] Sh. Yuan, M., Zhou, X., Liu, B., Jiang, Effect of pressure-driven flow on electroosmotic flow and electrokinetic mass transport in microchannels, International Journal of Heat and Mass Transfer, 206 (2023) 123925.

[20] S. Movahed, R., Kamali, Zh., Ding, Y., Jian, Electroosmotic and pressure-driven slip flow of fractional viscoelastic fluids in microchannels, Applied Mathematics and Computation, 425 (2022) 127073.

[21] K. Hriuchi, P., Dutta, Heat transfer characteristics of mixed electroosmotic and pressure driven micro flows, JSME International Journal Series B Fluids and Thermal Engineering, 49 (2006) 812-819.

[22] A.M. Afonso, M.A., Alves, F.T., Pinho, Analytical solution of mixed electroosmotic/pressure driven flows of viscoelastic fluids in microchannels, Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics, 159 (1-3) (2009) 50-63.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

[23] A. Merdasi, S., Ebrahimi, X., Yang, R., Kunz, Physics informed neural network application on mixing and heat transfer in combined electroosmotic-pressure driven flow, Chemical Engineering and Processing-Process Intensification, 193 (2023) 109540.

[24] S. Bhattacharyya, S., Bera, Combined electroosmotic-pressure driven flow and mixing in a microchannel with surface hetergenity, Applied Mathematical Modelling, 39 (15) (2015) 4337-4350.

[25] F. Li, Y., Jian, Solute dispersion generated by alternating current electric field through polyelectrolyte-grafted nanochannel with interfacial slip, International Journal of Heat and Mass Transfer, 141 (2019) 1066-1077.

[26] C. Teodoro, O., Bautista, F., Mendez, J., Arcos, Mixed electroosmotic/pressure-driven flow for a generalized Phan-Thien-Tanner fluid in a microchannel with nonlinear Navier slip at the wall, European Journal of Mechanics-B/Fluids, 97 (2023) 70-77.

[27] M. Rezaei, A.R., Azimian, A.R., Pishevar, Surface charge-dependent hydrodynamic properties of an electroosmotic slip flow, Physical Chemistry Chemical Physics, 20 (48) (2018) 30365-30375.

[28] G.C. Shit, A., Mondal, A., Sinha, P.K., Kundu, Electro-osmotic flow of power-law fluid and heat transfer in a microchannel with effects of Joule heating and thermal radiation, Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 462 (2016) 1040-1057.

[29] A.S. Hedge, A.R., Harikrishnan, Slip hydrodynamics of combined electroosmotic and pressure driven flows of power law fluids through narrow confinements, European Journal of Mechanics-B/Fluids, 89 (2021) 525-550.

[30] P.K. Mondal, U., Ghosh, A., Bandopadhyay, D., Dasgupta, S., Chakraborty, Electric-field-driven contact-line dynamics of two immiscible fluids over chemically patterned surfaces in narrow confinements, Physical Review E, 88 (2) (2013) 023022.

[31] D. Song, R.J., Daniello, J.P., Rothstein, Drag reduction using superhydrophobic sanded Teflon surfaces, Experiments in Fluids, 55 (8) (2014) 1783.

[32] C.H. Choi, U., Ulmanella, J., Kim, C.M., Ho, C.J., Kim, Effective slip and friction reduction in nanograted superhydrophobic microchannels, Physics of Fluids, 18 (8) (2006) 087105.

[33] M.H. Park, H.S., Sohn, Measurement of zeta potential of macroscopic surfaces with Navier velocity slip exploiting electrokinetic flows in a microchannel, International Journal of Heat and Mass Transfer, 54 (15-16) (2011) 3466-3475.

[34] M.S. Saravani, M., Kalteh, Heat transfer investigation of combined electroosmotic/pressure driven nanofluid flow in a microchannel: Effect of heterogeneous surface potential and slip boundary condition, European Journal of Mechanics-B/Fluids, 80 (2020) 13-25.

[35] A. Sadeghi, M.H., Saidi, Viscouse dissipation effects on thermal transport characteristics of combined pressure and electroosmotically driven flow in micochannels, International Journal of Heat and Mass Transfer, 53 (19-20) (2010) 3782-3791.

[36] R. Dey, D., Chakraborty, S., Chakraborty, Analytical solution for thermally fully developed combined electroosmotic and pressure-driven flows in narrow confinements with thick electrical double layers, ASME Journal of Heat Transfer, 133 (2) (2011) 024503.

[37] C.H. Chen, Electro-osmotic heat transfer of non-Newtonian fluid flow in micochannels, ASME Journal of Heat Transfer, 133 (7) (2011) 071705.

[38] A. Babaie, M.H., Saidi, A., Sadeghi, Heat transfer characteristics of mixed electroosmotic and pressure driven flow of power-law fluids in a slit microchannel, International Journal of Thermal Science, 53 (2012) 71-79.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

[39] A.J. Moghadam, Exact solution of electroviscous flow and heat transfer in a semi-annular microcapillary, ASME Journal of Heat Transfer, 138 (1) (2016) 011702.

[40] P. Goswami, P.K., Mondal, A., Datta, S., Chakraborty, Entropy generation minimization in an electroosmotic flow of non-Newtonian fluid: Effect of conjugate heat transfer, ASME Journal of Heat Transfer, 138 (5) (2016) 051704.

[41] G.D. Ngoma, F., Erchiqui, Heat flux and slip effects on liquid flow in a microchannel, International Journal of Thermal Science, 46 (11) (2007) 1076-1083.

[42] C. Li, Z., Liu, X., Liu, Z., Feng, X., Mo, Combined effect of surface charge and boundary slip on pressure-driven flow and convective heat transfer in nanochannels with overlapping electric double layer, International Journal of Heat and Mass Transfer, 176 (2021) 121353.

[43] Y. Liu, Y., Jian, The effects of finite ionic sizes and wall slip on entropy generation in electroosmotic flows in a soft nanochannel, ASME Journal of Heat Transfer, 141 (10) (2019) 102401.

[44] D. Li, *Electrokinetics in Microfluidics*, Vol. 2, ELSEVIER (2004).

[45] V. Tandon, S,K., Bhagavatula, W.C., Nelson, B.J., Kirby, Zeta potential and electroosmotic mobility in microfluidic devices fabricated from hydrophobic polymers: 1. The origins of charge, Electrophoresis, 29 (5) (2008) 1092-1101.

[46] N.V. Churaev, J., Ralston, I.P., Sergeeva, V.D., Sobolev, Electrokinetic properties of methylated quartz capillaries, Advances in Colloid and Interfacial Science, 96 (1-3) (2002) 265-278.

[47] N.V. Yang, D.Y., Kwok, A new method to determine zeta potential and slip coefficient simultaneously, The Journal of Physical Chemistry B, 106 (50) (2002) 12851-12855.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]

Analysis of combined electroosmotic and pressure-driven flow in cylindrical microchannels considering interfacial slip effects and slip-dependent zeta potential

Hossein Tamim[1*]

[1]Department of Mechanical Engineering, Ar.C., Islamic Azad University, Arak, Iran

Received: Autumn 2025 Accepted: Winter 2026

Abstract

The main objective of this research is the analytical study of the combined electroosmotic and pressure-driven flow of an aqueous solution in a cylindrical microchannel. The effects of interfacial slip and slip-dependent zeta potential are also considered. The governing equations, including the Poisson-Boltzmann equation and the equation of motion, have been analytically solved, and the influence of all physical and electrokinetic parameters on the electrical potential distribution, velocity profile, and related parameters such as skin friction coefficient and volumetric flow rate have been investigated. The results show that surface slip has a significant impact on the flow field and electrical potential distribution, such that an increase in slip length results in an increase in both electrical potential and flow velocity. A similar behavior is observed with the growth of the zeta potential on the wall surface of the microchannel. By applying a reverse pressure gradient and increasing it, reverse flows gradually emerge at the center of the microchannel, which may lead to the formation of negative flow rates (overall flow in the opposite direction). The highest volumetric flow rate and friction coefficient occur in the presence of the thinnest electrical double layers (larger Debye parameter), whereas an opposite trend is observed for thicker double layers. The variations of volumetric flow rate and friction coefficient with respect to the pressure gradient parameter are linear.

Key words: Electroosmotic flow, Microchannel, Interfacial slip, Slip-dependent zeta potential, Analytical solution

*corresponding author: hossein.tamim@iau.ac.ir

Cite this article as: Hossein Tamim, Analysis of combined electroosmotic and pressure-driven flow in cylindrical microchannels considering interfacial slip effects and slip-dependent zeta potential. **Journal of Energy Conversion, 2026, 12(4), 31-51**.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-06]

[DOI: 10.82377/jeed.2026.w.552]