نشریه علمی-تخصصی تبدیل انرژی (JEED)

J. Energy Conversion
Volume: 12, Issue:3, 2025: 53-72

دوره ۱۲، شماره ۳، پاییز ۱۴۰۴، ص: ۷۲-۵۳

توسعه و پیاده‌سازی روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا در تحلیل عددی جریان‌های سیال

محمدحامد حکمت

استادیار، دانشکده مهندسی مکانیک، دانشگاه تفرش، تفرش، ایران، hekmat@tafreshu.ac.ir

دریافت: ۱۴۰۴/۵/۱۲، بازنگری: ۱۴۰۴/۷/۳۰، پذیرش: ۱۴۰۴/۸/۲۶

چکیده

در این تحقیق, کارایی و عملکرد روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا در مسائل تولید شبکه با سازمان مورد بررسی قرار گرفت. بدین منظور از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی جهت تولید شبکه استفاده گردید و تمامی تمهیدات مربوط به ایجاد تراکم در نقاط شبکه در نزدیکی یک خط یا خطوط, یک نقطه یا نقاط و یا ترکیبی از آن‌ها و تعامد روی مرزها در نظر گرفته شد. بخش عمده‌ای از کار در این تحقیق بر روی استخراج معادلات تولید شبکه با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا متمرکز گردید. سپس معادلات تولید شبکه با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا گسسته و با استفاده از روش تکراری گوس-سایدل به صورت عددی حل شد. هم‌چنین از یک دستگاه شبکه جبری تولید شده به‌عنوان توزیع اولیه شبکه نقاط لازم در تولید این شبکه بیضوی استفاده شد. نتایج عددی برای چندین مثال مختلف اعم از تولید شبکه برای جریان‌های داخلی و خارجی استخراج و از نظر کیفی و کمی مورد بررسی قرار گرفت. هم‌چنین این نتایج با نتایج به‌دست آمده از روش اختلاف محدود مرکزی مقایسه گردید. نتایج عددی نشان داد که روش حاضر در مقایسه با روش اختلاف محدود مرکزی, کارایی روش تولید شبکه موردنظر را افزایش و هزینه‌های محاسباتی را به‌طور قابل توجهی کاهش می‌دهد. بر این اساس, استفاده از این روش, کاهش زمان محاسباتی بین ۷۰ تا ۹۰ درصد را در تولید شبکه, بسته به ابعاد شبکه و شرایط مسئله, به همراه دارد. این تحقیق نشان داد که روش اختلاف محدود فشرده می‌تواند به‌عنوان یک رویکرد گسسته سازی کارآمد و با کارایی بالا در مسائل تولید شبکه پیچیده مورد استفاده قرار گیرد.

عهده‌دار مکاتبات: Hekmat@tafreshu.ac.ir

کلمات کلیدی: تولید شبکه بیضوی، روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا، روش اختلاف محدود استاندارد، هزینه محاسباتی.

نحوه استناد به این مقاله محمدحامد حکمت، توسعه و پیاده‌سازی روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا در تحلیل عددی جریان‌های سیال، **مهندسی مکانیک تبدیل انرژی. ۱۴۰۴; ۱۲ (۳) : ۷۲-۵۳.**

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

۱- مقدمه

روش‌های اختلاف محدود, مدت زمان طولانی است که به‌منظور تقریب معادلات دیفرانسیل پاره‌ای استفاده می‌شوند. اگرچه روش‌های اختلاف محدود روش‌های سرراستی هستند اما عیب بزرگ آن‌ها این است که جهت پیاده‌سازی نیاز به یک شبکه با سازمان دارند. ساده‌ترین و معروف‌ترین روش اختلاف محدود که جهت تقریب معادلات بیضوی مرتبه دوم استفاده می‌شود, روش اختلاف محدود مرکزی روی یک شبکه با سازمان غیریکنواخت است. در حالت کلی در یک روش اختلاف محدود مرکزی, مشتقات مرتبه p) p که p یک عدد زوج است می‌توانند با $p+1$ نقطه که در موقعیت متقارن نسبت به هم قرار دارند, تقریب زده شوند و در صورتی‌که p فرد باشد $p+2$ گره مورد نیاز است. در این‌جا, دقت روش اختلاف محدود مرکزی از مرتبه $O(h^2)$ می‌باشد. به‌منظور افزایش دقت محاسباتی چندین راه‌کار وجود دارد. یک روش استاندارد برای رسیدن به دقت بالاتر, درگیرکردن نقاط بیش‌تری از شبکه در تقریب مشتقات موردنظر می‌باشد. در حالت کلی برای تقریب مشتق مرتبه p با دقت مرتبه m با استفاده از روش اختلاف محدود مرکزی, $p+m-1$ نقطه بایستی درگیر شود اگر p زوج باشد و درصورتی‌که p فرد باشد $p+m$ نقطه درگیر می‌شوند. این موضوع سبب افزایش پهنای باند ماتریس ضرایب خواهد شد و هزینه محاسباتی را به‌شدت افزایش می‌دهد. اما به‌هرحال این نوع راه‌کار به‌طور معمول در مسائل مختلف به‌کار گرفته شده‌اند. برای مثال, لئونارد [۱] یا بردلی [۲] برای اولین بار چنین روش‌های تفاضلی را برای تقریب مشتقات مرتبه اول گسترش دادند. نشان داده شد که با این روش‌ها امکان دقت بیش‌تر و کاهش خطای حل بدون افزایش تعداد نقاط محاسباتی نسبت به روش‌های کلاسیک مرتبه دوم فراهم می‌گردد. هم‌چنین گوپتا و همکارانش [۳] این استراتژی را در یک رویکرد محدودکننده شار تقلیل تغییر کل پیاده‌سازی کردند. الگوریتم ارائه‌شده, به کمک درون‌یابی درجه دو, مدلی برای جابه‌جایی ارائه داد که از مشکلات ناپایداری روش تفاضل مرکزی جلوگیری کرده و در عین‌حال از خطاهای ناشی از نفوذ عددی روش پیش‌رو در امان بود, به‌گونه‌ای که دقت فراتر از روش‌های معمولی با مصرف مشابه محاسباتی حاصل و امکان استفاده از گام‌های شبکه بسیار بزرگ‌تر برای دقت مشابه فراهم شد. سایر مثال‌ها شامل کاربرد این روش‌ها در روش‌های غیرنوسانی ضروری ارائه شده توسط هارتن و همکارانش [۴] و روش‌های مرتبه بالا توسعه یافته توسط جین [۵] می‌باشد که دقت را به مرتبه دو ارتقا داده و با حفظ پایداری در حضور ناپیوستگی‌ها, امکان حل دقیق‌تر معادلات همرفتی را فراهم کردند. اما, به‌هرحال در همه این مطالعات آن‌چه که به وضوح به‌عنوان یک ضعف دیده می‌شود این است که این راه‌کار اگرچه دقت روش را افزایش می‌دهد اما به‌همان نسبت هزینه محاسباتی را نیز به‌علت نداشتن یک فرم فشرده, افزایش می‌دهد. این عیب روش‌هایی سنتی از این دست که دارای یک فرم غیرفشرده هستند, علت اصلی گسترش یک دسته از روش‌هایی گردید که از هر دو خاصیت داشتن دقت بالا و داشتن یک فرم فشرده به‌طور هم‌زمان برخوردار هستند که به آن‌ها روش‌های اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا اطلاق می‌گردد. در این روش‌ها از معادلات حاکم موجود جهت تقریب زدن جملات خطای برشی استفاده می شود تا بدون درگیرشدن نقاط بیش‌تر دقت افزایش یابد.

امروزه روش‌های اختلاف محدود فشرده با توجه به نیازهای موجود و مزایای آن, توسط بسیاری از محققان در زمینه‌های مختلف مورد بررسی و توسعه قرار گرفته اند. هرچ [۶] تجارب عددی خود را با یک گروه از روش‌های اختلاف محدود فشرده جهت افزایش دقت تقریب مشتقات مرتبه اول و دوم هدایت نمود. او برای اولین بار از روش اختلاف محدود مرتبه چهار جهت حل عددی معادلات برگرز و برخی مسائل مکانیک سیالات ساده مانند جریان داخل یک حفره استفاده نمود و کارایی روش حاضر را با روش‌های اختلاف محدود مرتبه دوم مقایسه نمود. نشان داده شد که روش پیشنهادی دقت بسیار بهتری نسبت به روش‌های مرتبه دوم دارد و به سادگی می‌توان آن‌را با زمان‌گسسته‌سازی‌های صریح یا ضمنی ترکیب کرد. فارستر [۷] یک روش تفاضلی مرتبه بالا را ارائه نمود که فرم فشرده معادلات را حفظ می‌کند. او از این روش در شبیه‌سازی انتشار امواج یک بعدی و با هدف کاهش نوسانات غیرفیزیکی در نواحی با گرادیان شدید استفاده نمود. روش حاضر نیاز به کم‌تر از یک‌سوم نقاط شبکه نسبت به روش‌های مرتبه دوم برای حفظ دقت همان بخش‌های تیز موج داشت. همکر [۸] از یک روش اختلاف محدود مرتبه بالا در یک فرم فشرده جهت حل عددی معادله پخش-جابه‌جایی با ضرایب ثابت استفاده نمود. روش پیشنهادی, به‌خصوص در شرایطی که ضریب نفوذ کوچک و همرفت غالب بود, پایداری بالایی داشت و توانست لایه‌های مرزی و داخلی را به‌درستی در شبکه‌های عددی حل کند. ضمن این‌که روش پیشنهادی برای شبکه‌های منظم مربعی, نتایج عددی موفقی ارائه و پایداری و کارایی خوبی حتی

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

در شرایط غالب بودن همرفت نشان داد. گارتلن و همکارانش [۹] پایداری روش‌های مختلف اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا را بررسی کردند. مشاهده شد که تقریب پنج‌نقطه‌ای جدید ارائه شده برای معادله همرفت-انتشار دوبعدی با ضرایب ثابت و خطی باعث پایداری بهتر روش‌های دو عبوری یا مرحله‌ای در حل معادلات جبری خطی می‌شود. میتز و فاسل [۱۰] یک روش اختلاف فشرده را جهت حل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر غیردائم در فرمول‌بندی ورتیستی- سرعت به‌کار بردند. آن‌ها نشان دادند که روش حاضر قابل کاربرد در مسائل لایه مرزی مغشوش بوده و دقت نتایج را به‌شدت تحت تأثیر قرار می‌دهد. شرر و اسکات [۱۱] یک روش اختلاف محدود فشرده با مرتبه بسیار بالا جهت حل عددی قوانین بقا روی شبکه‌های انحنادار کلی برای پیکربندی‌های هندسی پیچیده ارائه نمودند. آن‌ها نشان دادند که با استفاده از روش حاضر می‌توان دقت حل عددی تا شش مرتبه اعشار افزایش داد. شوکلا و سانگ [۱۲] با استفاده از یک درون‌یابی چند جمله‌ای ساده یک روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا برای مشتقات مرتبه اول و دوم استخراج کردند و روی پایداری و دقت روش ارائه شده بحث کردند. مهم‌ترین نتیجه این بود که روش پیشنهادی روی شبکه‌های غیریکنواخت, کاراتر از روش ضرایب نامعین است و این طرح با دقت تا مرتبه ۱۴ پایدار و دقیق در نزدیکی مرزها عمل می‌کند. بینیاس [۱۳] از دو روش اختلاف محدود فشرده جدید برای حل مسائل مقدار مرزی در معادلات دیفرانسیل معمولی غیرخطی مرتبه دو با استفاده از شبکه های غیریکنواخت استفاده کردند و نتیجه گرفتند که دو روش پیشنهادی, با دقت عملی نزدیک به مرتبه چهار عملکردی رقابتی نسبت به روش‌های پیشین دارند. شا و همکارانش [۱۴] یک روش اختلاف محدود فشرده رو به باد مرتبه سوم را برای حل عددی غیردائم معادلات ناویر-استوکس تراکم ناپذیر پیاده‌سازی نمودند. آن‌ها جهت تقریب‌زدن جملات جابه‌جایی از روش فشرده رو به باد و برای تقریب جملات لزجت از روش اختلاف محدود فشرده مرتبه چهار استفاده و نتایج را برای چند جریان پایه در رینولدزهای پایین و متوسط مورد بررسی قرار دادند. آن‌ها دریافتند که روش فشرده پیشنهادی در مقایسه با روش غیرفشرده, دقت بیش‌تری با هزینه محاسباتی مشابه دارد. کای و همکارانش [۱۵] یک دسته از روش‌های اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا را جهت حل معادلات پواسون سه بعدی استخراج کردند و نشان دادند که روش پیشنهادی می‌تواند این معادله را با دقت بالا و بهره‌وری محاسباتی بهینه حل کند, به‌گونه‌ای که هم‌گرایی سریع‌تر و دقت بالاتر نسبت به روش‌های مرسوم فراهم آورد. انصاری و همکارانش [۱۶] یک روش اختلاف محدود فشرده مرتبه ششم را جهت تحلیل ارتعاش آزاد یک تیر اویلر-برنولی به کار بردند. آن‌ها روش حاضر را در مسائل با شرایط مرزی مختلف مورد بررسی قرار داده و با مقایسه فرکانس‌های طبیعی به‌دست آمده با فرکانس‌های دقیق نشان داده شد که روش ارائه‌شده, دقت بسیار بالایی در پیش‌بینی فرکانس‌های طبیعی ارتعاش آزاد تیرهای اویلر-برنولی دارد. هم‌چنین ستل و همکارانش [۱۷] یک روش اختلاف محدود فشرده مرتبه پنج نه نقطه‌ای را برای حل عددی معادله پواسون یک بعدی و دو بعدی با شرایط مرزی دیریشله ارائه کردند و نشان دادند که این روش ضمن حفظ ساختار فشرده, دقت بالای مرتبه چهارم را با استفاده از استنسیل کوچک (کم‌ترین نقاط لازم) فراهم می‌کند, که منجر به کارایی بهتر و کاهش هزینه محاسباتی در حل معادله پواسون می‌شود.

در حالت کلی هزینه محاسباتی یک روش تولید شبکه به پارامترهای مختلفی مانند نوع مسأله, اندازه شبکه, پیچیدگی هندسه و میدان حل, بعد میدان حل (دو بعدی یا سه بعدی بودن) و غیره بستگی دارد. اگرچه هزینه محاسباتی تولید شبکه برای مسائل ساده دو بعدی در مقایسه با هزینه محاسباتی حل معادلات میدان جریان بالا نیست اما در برخی مسائل مانند تولید شبکه‌های ریز در مسائل سه بعدی پیچیده و یا در مسائل بهینه‌سازی عددی که به چندین بار حل میدان جریان و بالتبع آن تولید شبکه نیاز دارند این هزینه قابل ملاحظه بوده و کاهش این هزینه می‌تواند کارایی محاسبات عددی را در حالت کلی بهبود بخشد. هدف این مقاله ارائه یک روش عددی جدید در حوزه تولید شبکه بیضوی است که با بهره‌گیری از روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا, دقت محاسباتی قابل توجهی را در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی فراهم می‌آورد. نوآوری اصلی کار در توسعه گسسته‌سازی فشرده مرتبه چهارم است که ضمن حفظ سرعت هم‌گرایی و کاهش هزینه‌های محاسباتی, امکان تولید شبکه‌هایی با کیفیت بالا برای مسائل پیچیده را با کارایی بهینه فراهم می‌سازد. این رویکرد, نسبت به روش‌های استاندارد اختلاف محدود, دقت و کارایی بهتری دارد و می‌تواند در زمینه‌های کاربردی مختلف جریانات سیال و مسائل بهینه‌سازی شبکه مورد استفاده قرار گیرد.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

۲-تولید شبکه بیضوی

روش‌های تولید شبکه باسازمان را می‌توان به‌صورت زیر دسته‌بندی نمود: ۱- شبکه‌سازی به روش جبری ۲- شبکه‌سازی با استفاده از معادلات دیفرانسیل ۳- شبکه‌سازی با استفاده از اعداد مختلط و نگاشت همدیس. روش شبکه‌سازی که در حال کسب معروفیت زیاد است, روش مبتنی بر معادله دیفرانسیل است. در این روش یک دستگاه معادله دیفرانسیل پاره‌ای را حل می‌کنیم تا نقاط شبکه در فضای فیزیکی به‌دست آید, در حالی‌که فضای محاسباتی یک شبکه مستطیلی با فواصل یکنواخت است. این روش را به روش‌های معادلات دیفرانسیل بیضوی, سهموی و هذلولوی دسته‌بندی می‌کنند. روش بیضوی تولید شبکه, روشی است که بیش‌تر توسعه یافته و روی آن کار شده است. این روش معمولاً در مسائل دو بعدی به کار می‌رود و به مسائل سه بعدی نیز تعمیم داده شده است. از فواید این روش می‌توان به موارد زیر اشاره نمود: ۱) ایجاد توزیع همواری از نقاط گره‌ها, بدین معنی که اگر ناپیوستگی در مرزها باشد, در قلمرو داخلی هموار خواهد شد. ۲) برای فشرده‌سازی و تعامد در سطوح, راه‌های زیادی وجود دارد. ۳) هرگاه مرزهای فیزیکی مشخص باشند, تولید بیضوی شبکه بسیار خوب عمل می‌کند. اما مهم‌ترین عیب این روش در مقایسه با دو روش دیگر زمان زیاد محاسبات آن است.

در این‌جا, دستگاه معادلات دیفرانسیل بیضوی را به‌صورت معادله لاپلاس یا معادله پواسون معرفی می‌کنیم که از حل آن‌ها مختصات نقاط شبکه در فضای فیزیکی به‌دست می‌آید. برای حل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی از روش تکراری گوس-سایدل استفاده شده است. دستگاه معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی در فضای فیزیکی به‌صورت زیر است.

$$\begin{aligned} &\xi_{xx}+\xi_{yy}=0 \\ &\eta_{xx}+\eta_{yy}=0 \end{aligned} \qquad (۱)$$

که x و y مختصه‌های محدوده فیزیکی و ξ و η مختصه‌های محدوده محاسباتی هستند. با تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی در نهایت داریم:

$$\begin{aligned} &ax_{\xi\xi}-2bx_{\xi\eta}+cx_{\eta\eta}=0 \\ &ay_{\xi\xi}-2by_{\xi\eta}+cy_{\eta\eta}=0 \end{aligned} \qquad (۲)$$

که

$$a=x_\eta^2+y_\eta^2 \quad , \; b=x_\xi x_\eta+y_\xi y_\eta \quad , \; c=x_\xi^2+y_\xi^2 \qquad (۳)$$

ضرایب a, b و c معمولاً وابسته به مختصات و شرایط مرزی بوده و نقش تعیین‌کننده‌ای در نحوه انتقال تغییرات شبکه از فضای محاسباتی به فضای فیزیکی دارند. از تقریب مشتقات پاره‌ای به کمک عبارت‌های تفاضل محدود مرکزی مرتبه دوم داریم:

$$a\left\{\frac{x_{i+1,j}-2x_{i,j}+x_{i-1,j}}{\Delta\xi^2}\right\}-2b\left\{\frac{x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j-1}+x_{i-1,j-1}-x_{i-1,j+1}}{4\Delta\xi\Delta\eta}\right\}+c\left\{\frac{x_{i,j+1}-2x_{i,j}+x_{i,j-1}}{\Delta\eta^2}\right\}=0 \qquad (۴)$$

که i و j به‌ترتیب نمایان‌گر اندیس برای نقاط شبکه در جهت مختصه‌های محاسباتی ξ و η هستند. از روش تکراری گوس-سایدل معادله فوق به‌صورت زیر حاصل می‌شود:

$$x_{i,j}=\left\{\frac{a}{(\Delta\xi)^2}[x_{i+1,j}+x_{i-1,j}]+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}[x_{i,j+1}+x_{i,j-1}]-\frac{b}{2\Delta\eta\Delta\xi}[x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j-1}+x_{i-1,j-1}-x_{i-1,j+1}]\right\}/2\left[\frac{a}{(\Delta\xi)^2}+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}\right] \qquad (۵)$$

$$y_{i,j}=\left\{\frac{a}{(\Delta\xi)^2}[y_{i+1,j}+y_{i-1,j}]+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}[y_{i,j+1}+y_{i,j-1}]-\frac{b}{2\Delta\eta\Delta\xi}[y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j-1}+y_{i-1,j-1}-y_{i-1,j+1}]\right\}/2\left[\frac{a}{(\Delta\xi)^2}+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}\right] \qquad (۶)$$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

که $\Delta\xi$ و $\Delta\eta$ به‌ترتیب گام مکانی در راستای ξ و η هستند. معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی (۱) دارای هیچ‌گونه امکان کنترل شبکه نیستند. موقعیت نقاط روی بدنه جسم و مرز خارجی به‌عنوان ورودی مطرح‌اند. بنابراین کنترل فواصل نقاط بر روی مرزهای جسم را کاربر مشخص می‌کند. برای کنترل نقاط داخلی شبکه باید از معادلات پوآسون استفاده شود:

$$\begin{aligned}\xi_{xx}+\xi_{yy}&=P(\xi,\eta)\\ \eta_{xx}+\eta_{yy}&=Q(\xi,\eta)\end{aligned} \qquad (۷)$$

با تبدیل معادلات دیفرانسیل پاره‌ای از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی در نهایت داریم:

$$\begin{aligned}\xi_{xx}+\xi_{yy}&=-\frac{1}{J^2}(P\,x_\xi+Q\,x_\eta)\\ \eta_{xx}+\eta_{yy}&=-\frac{1}{J^2}(P\,y_\xi+Q\,y_\eta)\end{aligned} \qquad (۸)$$

که J معرف ژاکوبین تبدیل مختصات از فضای فیزیکی به فضای محاسباتی است. توابع P و Q بسته به نوع نیاز (ایجاد تراکم در یک جای خاص یا عمود کردن خطوط شبکه بر سطوح جسم) انتخاب می‌شوند. به‌منظور تراکم نقاط شبکه در نزدیکی یک خط یا یک نقطه شبکه یا ترکیبی از آن‌ها از رابطه زیر استفاده شده است:

$$\begin{aligned}P_{i,j}=&-\sum_{IS=1}^{NI} a\,\frac{i-IAL(IS)}{ABS(i-IAL(IS))}\exp\left[-c\,ABC(i-IAL(IS))\right]\\ &-\sum_{JS=1}^{NJ} b\,\frac{i-IAL(JS)}{ABS(i-IAL(JS))}\exp\left[-d\left[\left[i-IAL(JS)\right]^2+\left[j-JAL(JS)\right]^2\right]^{1/2}\right]\end{aligned} \qquad (۹)$$

$$\begin{aligned}Q_{i,j}=&-\sum_{IS=1}^{NI} a\,\frac{j-JAL(IS)}{ABS(j-JAL(IS))}\exp\left[-c\,ABC(j-JAL(IS))\right]\\ &-\sum_{JS=1}^{NJ} b\,\frac{j-JAL(JS)}{ABS(j-JAL(JS))}\exp\left[-d\left[\left[i-IAL(JS)\right]^2+\left[j-JAL(JS)\right]^2\right]^{1/2}\right]\end{aligned} \qquad (۱۰)$$

در رابطه با روابط فوق نکات زیر بایستی مدنظر قرار گیرد: ۱) جمله اول رابطه اول تراکم خطوط شبکه حول خط یا خطوط شبکه ξ ایجاد می‌کند. هم‌چنین جمله اول رابطه دوم تراکم خطوط شبکه را حول خط یا خطوط شبکه η ایجاد می‌کند. ۲) جمله دوم رابطه اول جمع شدن خطوط شبکه ξ را حول یک نقطه یا نقاطی از شبکه ممکن می‌سازد. هم‌چنین جمله دوم رابطه دوم باعث جمع شدن خطوط شبکه η در نزدیکی یک نقطه یا نقاطی از شبکه می‌شود. ۳) ضرایب a و b ضرایب تقویت و c و d ضرایب استهلاک می‌باشند که ورودی برنامه هستند و تابع مسأله خاص موردنظرند, یعنی تابع قلمرو فیزیکی, تعداد نقاط به‌کار رفته, نقاط مرزی و غیره. ۴) NI تعداد خطوط شبکه ξ یا η است که در نزدیکی آن‌ها تراکم انجام می‌شود. برای معادله P تعداد خطوط شبکه ξ و برای معادله Q تعداد خطوط شبکه η می‌باشد. ۵) $IAL\ (IS)$ و $JAL\ (IS)$ مشخص‌کننده شماره خط‌هاست. ۶) NJ تعداد نقاط شبکه‌ایست که در نزدیکی آن‌ها تراکم انجام می‌شود. ۷) $IAL\ (JS)$ و $JAL\ (JS)$ مشخص‌کننده شماره نقاط است. در روابط (۹) و (۱۰), ABC همان قدرمطلق است. با درنظرگرفتن تابع علامت ایجاد کشش در دو طرف خطوط و امکان‌پذیر می‌گردد.

در نهایت رابطه گسسته شده معادله (۸) به‌صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}x_{i,j}=&\left\{\left\{\frac{a}{(\Delta\xi)^2}[x_{i+1,j}+x_{i-1,j}]+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}[x_{i,j+1}+x_{i,j-1}]-\right.\right.\\ &\left.\left.\frac{b}{2\Delta\eta\Delta\xi}[x_{i+1,j+1}-x_{i+1,j-1}+x_{i-1,j-1}-x_{i-1,j+1}]\right\}/2\left[\frac{a}{(\Delta\xi)^2}+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}\right]\right\}\\ &+\left\{\left[1/J_{i,j}{}^2\left(P_{i,j}\left(\frac{x_{i+1,j}-x_{i-1,j}}{2\Delta\xi}\right)+Q_{i,j}\left(\frac{x_{i,j+1}-x_{i,j-1}}{2\Delta\eta}\right)\right)\right]/2\left[\frac{a}{(\Delta\xi)^2}+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}\right]\right\}\end{aligned} \qquad (۱۱)$$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

$$y_{i,j}=\left\{\begin{array}{l}\left\{\dfrac{a}{(\Delta\xi)^2}[y_{i+1,j}+y_{i-1,j}]+\dfrac{c}{(\Delta\eta)^2}[y_{i,j+1}+y_{i,j-1}]-\right.\\ \left.\dfrac{b}{2\Delta\eta\Delta\xi}[y_{i+1,j+1}-y_{i+1,j-1}+y_{i-1,j-1}-y_{i-1,j+1}]\right\}/2\left[\dfrac{a}{(\Delta\xi)^2}+\dfrac{c}{(\Delta\eta)^2}\right]\end{array}\right\} \quad (۱۲)$$
$$+\left\{\left[1/J_{i,j}{}^2(P_{i,j}(\frac{y_{i+1,j}-y_{i-1,j}}{2\Delta\xi})+Q_{i,j}(\frac{y_{i,j+1}-y_{i,j-1}}{2\Delta\eta}))\right]/2\left[\frac{a}{(\Delta\xi)^2}+\frac{c}{(\Delta\eta)^2}\right]\right\}$$

در بعضی محاسبات, نظیر محاسبات مربوط به لایه مرزی, عمود بودن خطوط شبکه بر مرز از اهمیت زیادی برخوردار است. تعامد خطوط بر مرزها باعث می شود که گرادیان عمودی خواص در مرزها با دقت بالاتری محاسبه شود. تابع پیشنهادی جهت ایجاد تعامد روی یک مرز دلخواه مانند $\eta=\eta_1$ به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}P_{i,j}&=P_{1_{i,1}}\exp(-A(\eta-\eta_1))\\ Q_{i,j}&=Q_{1_{i,1}}\exp(-B(\eta-\eta_1))\end{aligned} \quad (۱۳)$$

که در آن A و B ثابت‌های مثبتی هستند و $P_{1_{i,1}}$ و $Q_{1_{i,1}}$ به‌صورت زیرند:

$$\begin{aligned}P_{1_{i,1}}&=J_{i,1}^2(R_{1_{i,1}}y_{\eta_{i,1}}-R_{2_{i,1}}x_{\eta_{i,1}})\\ Q_{1_{i,1}}&=J_{i,1}^2(-R_{1_{i,1}}y_{\xi_{i,1}}+R_{2_{i,1}}x_{\xi_{i,1}})\end{aligned} \quad (۱۴)$$

که در آن‌ها:

$$\begin{aligned}R_{1_{i,1}}&=-J_{i,1}^2(a_{i,1}x_{\xi\xi_{i,1}}-2b_{i,1}x_{\xi\eta_{i,1}}+c_{i,1}x_{\eta\eta_{i,1}})\\ R_{2_{i,1}}&=-J_{i,1}^2(a_{i,1}y_{\xi\xi_{i,1}}-2b_{i,1}y_{\xi\eta_{i,1}}+c_{i,1}y_{\eta\eta_{i,1}})\end{aligned} \quad (۱۵)$$

معادله (۱۳) به‌منظور تضمین تعامد خطوط شبکه بیضوی بر مرزهای جسم انتخاب شده است. رعایت شرط تعامد در فرآیند تولید شبکه اهمیت بسیار زیادی دارد, زیرا تعامد خطوط شبکه باعث می شود گرادیان‌ها یا تغییرات خواص عددی در مرزها با دقت بسیار بیش‌تری محاسبه شوند. این دقت بیش‌تر در مرزها به بهبود کیفیت کل شبکه و در نهایت افزایش صحت و دقت حل عددی معادلات جریان کمک می‌کند. استفاده از تابع پیشنهادی, به‌عنوان یک تابع نمایی با پارامترهای کنترل‌شونده, امکان تنظیم و کنترل دقیق شرایط تعامد را فراهم می‌آورد و به این ترتیب از بروز ناپیوستگی‌ها و مشکلات عددی در نزدیکی مرزها جلوگیری می‌نماید. این روش متداول و اثبات‌شده در تولید شبکه‌های بیضوی است که مطابق با روش‌ها و استانداردهای شناخته شده در تولید شبکه بهینه و با کیفیت به‌کار گرفته می‌شود [۱۸].

برای محاسبه توابع فوق ابتدا بایستی متریک‌ها و مشتقات آن‌ها بر روی سطح تعیین گردند. مشتق‌های نسبت به ξ در امتداد سطح را می‌توان از روابط زیر محاسبه کرد:

$$\begin{aligned}x_{\xi_{i,1}}&=\frac{x_{i+1,1}-x_{i-1,1}}{2\Delta\xi}\ ,\ x_{\xi\xi_{i,1}}=\frac{x_{i+1,1}-2x_{i,1}+x_{i-1,1}}{(\Delta\xi)^2}\\ y_{\xi_{i,1}}&=\frac{y_{i+1,1}-y_{i-1,1}}{2\Delta\xi}\ ,\ y_{\xi\xi_{i,1}}=\frac{y_{i+1,1}-2y_{i,1}+y_{i-1,1}}{(\Delta\xi)^2}\end{aligned} \quad (۱۶)$$

اما برای محاسبه مشتق‌های نسبت به η بر روی سطح شرط تعامد را اعمال می‌کنیم که در نهایت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}x_{\eta_{i,1}}&=s_{\eta_{i,1}}(-y_{\xi_{i,1}})/(x_{\xi_{i,1}}^2+y_{\xi_{i,1}}^2)^{1/2}\ ,\ x_{\eta\eta_{i,1}}=\frac{-7x_{i,1}+8x_{i,2}-x_{i,3}}{2(\Delta\eta)^2}-3x_{\eta_{i,1}}/\Delta\eta\\ y_{\eta_{i,1}}&=s_{\eta_{i,1}}(x_{\xi_{i,1}})/(x_{\xi_{i,1}}^2+y_{\xi_{i,1}}^2)^{1/2}\ ,\ y_{\eta\eta_{i,1}}=\frac{-7y_{i,1}+8y_{i,2}-y_{i,3}}{2(\Delta\eta)^2}-3y_{\eta_{i,1}}/\Delta\eta\end{aligned} \quad (۱۷)$$

که

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

$$s_{\eta_{i,1}} = ((x_{\eta_{i,1}})^2 + (y_{\eta_{i,1}})^2)^{1/2} \quad (۱۸)$$

مشتقات موجود در رابطه فوق در هر نقطه روی سطح با استفاده از روش اختلاف محدود پیشرو تقریب زده می شوند. پس از محاسبه $P_{i,j}$ و $Q_{i,j}$ برای هر نقطه داخل میدان نهایتاً می‌توان از رابطه (۱۷) برای محاسبه مختصات نقاط شبکه استفاده نمود. توجه داشته باشید که مشتقات مرتبه اولی که در سمت راست ظاهر می‌شوند با استفاده از روش اختلاف محدود پسرو و یا پیشرو تقریب زده می شوند. علت استفاده از این نوع تقریب, جلوگیری از نوسان‌های ناشی از تقریب تفاضل مرکزی به‌خاطر مقادیر بزرگ P_1 و Q_1 است. برای مثال اگر P_1 مثبت باشد, x_ξ و y_ξ با تفاضل پیشرو تقریب زده می شوند و اگر P_1 منفی باشد, x_ξ و y_ξ با تفاضل پسرو تقریب زده می شوند. به‌همین ترتیب اگر Q_1 مثبت باشد, x_η و y_η با تفاضل پیشرو تقریب زده می‌شوند و اگر Q_1 منفی باشد, x_η و y_η با تفاضل پسرو تقریب زده می شوند.

۳- استخراج معادلات تولید شبکه با استفاده از روش فشرده

در این بخش روند گسسته سازی معادلات بیضوی در روش تولید شبکه بیضوی با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده تشریح می‌شود. معادله حاکم اصلی (معادله بیضوی در فضای محاسباتی) را در نظر بگیرید:

$$a\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} - 2b\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = 0 \quad (۱۹)$$

ابتدا مشتقات موجود در معادله فوق را به‌صورت زیر تا دقت $O(h^4)$ تقریب می‌زنیم:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \delta_x^2\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\bigg|_{i,j} + O(h^4)\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \delta_y^2\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\bigg|_{i,j} + O(h^4)\\
&\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} = \delta_x\delta_y\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}\right]\bigg|_{i,j} + O(h^4)
\end{aligned} \quad (۲۰)$$

که δ_x و δ_x^2 به‌ترتیب اپراتورهای تفاضل مرکزی استاندارد برای مشتق اول و دوم تابع Φ نسبت به x و δ_y و δ_y^2 به‌ترتیب اپراتورهای تفاضل مرکزی استاندارد برای مشتق اول و دوم تابع Φ نسبت به y در نقطه (i,j) روی یک شبکه یکنواخت با اندازه h می‌باشند. با جایگذاری تقریبات فوق در معادله اصلی خواهیم داشت:

$$a\left(\delta_x^2\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}\bigg|_{i,j}\right) + c\left(\delta_y^2\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{12}\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}\bigg|_{i,j}\right) - 2b\left(\delta_x\delta_y\,\Phi_{i,j} - \frac{h^2}{6}\left[\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}\right]\bigg|_{i,j}\right) = 0 \quad (۲۱)$$

بنابراین معادله (۱۹) را می‌توان به فرم زیر بازنویسی نمود:

$$a\,\delta_x^2\,\Phi_{i,j} + c\,\delta_y^2\,\Phi_{i,j} - 2b\,\delta_x\delta_y\,\Phi_{i,j} - \tau_{i,j} = 0 \quad (۲۲)$$

$$\tau_{i,j} = \frac{h^2}{12}\left(a\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4} + c\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4} - 4b\left[\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y} + \frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}\right]\right)\bigg|_{i,j} + O(h^4) \quad (۲۳)$$

در این مرحله هریک از جملات موجود در رابطه خطای فوق را با استفاده از معادله حاکم اصلی (۱۹) تقریب می‌زنیم تا به یک فرم فشرده‌تری تبدیل شوند. ابتدا با دو بار بهینه‌سازی متوالی از معادله (۱۹) نسبت به x خواهیم داشت:

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

$$a\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^4}=-\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-c\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+2b\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}-2\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3} \quad (۲۴)$$

به‌طور مشابه با دو بار بهینه‌سازی متوالی از معادله (۱۹) نسبت به y خواهیم داشت:

$$c\frac{\partial^4\Phi}{\partial y^4}=-\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}-a\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+2\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+4\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}+2b\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}-2\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3} \quad (۲۵)$$

اکنون با جایگذاری عبارات (۲۴) و (۲۵) در معادله خطای (۲۳) خواهیم داشت:

$$\tau_{i,j}=-\frac{h^2}{12}[(\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+(a+c)\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+2(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3})$$
$$-2(\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 b}{\partial y^2})\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+2(\frac{\partial c}{\partial x}-2\frac{\partial b}{\partial y})\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}+2(\frac{\partial a}{\partial y}-2\frac{\partial b}{\partial x})\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+2b(\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3})] \quad (۲۶)$$
$$+O(h^4)$$

با کمی دقت در عبارت فوق مشاهده می شود که دو جمله آخر دارای فرم فشرده نیستند. بنابراین بایستی به طریقی این جملات را نیز به یک فرم فشرده درآورد. با یک‌بار بهینه سازی نسبت به x از معادله (۱۹) و هم‌چنین یک‌بار بهینه سازی نسبت به y و ترکیب دو عبارت حاصل خواهیم داشت:

$$\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}=-[\frac{1}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2+\frac{1}{c}(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y})]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-[\frac{1}{a}(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x})+\frac{1}{c}(\frac{\partial c}{\partial y})^2]\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-[\frac{c}{a}\frac{\partial a}{\partial x}$$
$$-2\frac{b}{c}\frac{\partial c}{\partial y}]\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-[\frac{a}{c}\frac{\partial c}{\partial y}-2\frac{b}{a}\frac{\partial a}{\partial x}]\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+[\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{2}{c}\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}]\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \quad (۲۷)$$

بنابراین جمله ماقبل آخر در رابطه (۲۶) به فرم فشرده حاصل گردید. حال جمله آخر را به فرم فشرده در می‌آوریم. با یک‌بار بهینه‌سازی از معادله (۱۹) نسبت به x خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}=-\frac{1}{a}(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+c\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}) \quad (۲۸)$$

هم‌چنین با بهینه‌سازی از معادله (۱۹) نسبت به y خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}=-\frac{1}{c}(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+a\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}) \quad (۲۹)$$

با بهینه‌سازی مجدد از معادله (۲۸) نسبت به y خواهیم داشت:

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3}+a\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial y^3}+$$
$$\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}+c\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}-2\frac{\partial^2 b}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}-2b\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}=0 \quad (۳۰)$$

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

هم‌اکنون با جایگذاری عبارات مناسب برای $\partial^3\Phi/\partial x^3$ و $\partial^3\Phi/\partial y^3$ با استفاده از روابط (۲۸) و (۲۹) در معادله (۳۰) و ساده‌سازی خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4\Phi}{\partial x\partial y^3}=&-\frac{1}{c}[\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+\frac{1}{a}\frac{\partial a}{\partial y}[-\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}-c\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}+2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\\&+2b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}]+a\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^3\partial y}+\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{1}{c}\frac{\partial c}{\partial x}[-\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-a\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}-\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}\\&+2b\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}]+\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-2\frac{\partial^2 b}{\partial x\partial y}\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}-2\frac{\partial b}{\partial y}\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}-2b\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}]\end{aligned}\qquad(۳۱)$$

اکنون با قرار دادن عبارات (۲۷) و (۳۱) در (۲۶) و مرتب کردن عبارات موجود در آن, فرم فشرده عبارت خطا حاصل می‌شود:

$$\tau_{i,j}=-[F'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+G'\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+H'\frac{\partial^4\Phi}{\partial x^2\partial y^2}+I'\frac{\partial^3\Phi}{\partial x\partial y^2}+K'\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^2\partial y}+L'\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}+M'\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3\partial y}]\Big|_{i,j}+O(h^4)\qquad(۳۲)$$

$$\begin{aligned}F'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[\frac{\partial^2 a}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 a}{\partial y^2}-\frac{2}{a}(\frac{\partial a}{\partial x})^2-\frac{2}{c}(\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial c}{\partial y})-\frac{2b}{c}\frac{\partial^2 a}{\partial x\partial y}+\frac{2b}{ca}\frac{\partial a}{\partial y}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{2b}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}]\Big|_{i,j}\\G'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[\frac{\partial^2 c}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 c}{\partial y^2}-\frac{2}{a}(\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial x})^2-\frac{2}{c}(\frac{\partial c}{\partial y})^2-\frac{2b}{c}\frac{\partial^2 c}{\partial x\partial y}+\frac{2b}{ca}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{2b}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial c}{\partial y}]\Big|_{i,j}\\H'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[a+c+\frac{4b^2}{c}]\Big|_{i,j}\\I'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[2\frac{\partial c}{\partial x}-4\frac{\partial b}{\partial y}-\frac{c}{a}\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{2b}{c}\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{2b}{a}\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{4b^2}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{2b}{c}\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{4b}{c}\frac{\partial b}{\partial x}]\Big|_{i,j}\\K'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[2\frac{\partial a}{\partial y}-4\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{a}{c}\frac{\partial c}{\partial y}+\frac{2b}{a}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{2b}{c}\frac{\partial a}{\partial x}-\frac{4b^2}{ca}\frac{\partial a}{\partial y}+\frac{2ab}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}-\frac{4b}{c}\frac{\partial b}{\partial y}]\Big|_{i,j}\\L'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[\frac{2}{a}\frac{\partial a}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial x}+\frac{2}{c}\frac{\partial c}{\partial y}\frac{\partial b}{\partial y}-2\frac{\partial^2 b}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 b}{\partial y^2}-\frac{4b}{ca}\frac{\partial b}{\partial x}\frac{\partial a}{\partial y}-\frac{4b}{c^2}\frac{\partial c}{\partial x}\frac{\partial b}{\partial y}]\Big|_{i,j}\\M'_{i,j}&=\frac{h^2}{12}[2b-\frac{4ab^2}{c}]\Big|_{i,j}\end{aligned}\qquad(۳۳)$$

با قرار دادن عبارت خطای به‌دست آمده (رابطه (۳۲)) درمعادله (۲۲) فرم فشرده معادله (۱۹) با دقت مرتبه ۴ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&(a_{i,j}+F'_{i,j})\delta_x^2\Phi_{i,j}+(c_{i,j}+G'_{i,j})\delta_y^2\Phi_{i,j}+(H'_{i,j})\delta_x^2\delta_y^2\Phi_{i,j}+(I'_{i,j})\delta_x\delta_y^2\Phi_{i,j}+(K'_{i,j})\delta_x^2\delta_y\Phi_{i,j}+\\&(-2b_{i,j}+L'_{i,j})\delta_x\delta_y\Phi_{i,j}=-M'_{i,j}(\frac{\partial^3\Phi}{\partial x^3\partial y})_{i,j}\end{aligned}\qquad(۳۴)$$

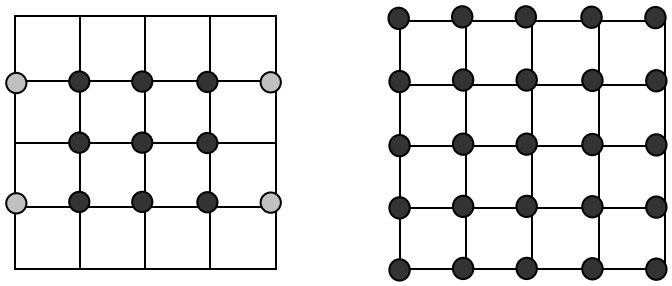
همان‌طور که مشاهده می‌شود, در این رابطه به‌علت وجود ترم $\partial^4\Phi/\partial x^3\partial y$, تعداد نقاط درگیر برابر ۱۳ می‌باشد. در حالی‌که اگر از تقریب تفاضل محدود مرکزی مرتبه ۴ استفاده می‌شد تعداد نقاط درگیر برابر ۲۵ می‌بود. بنابراین مشاهده می‌شود فرمول‌بندی حاضر نه‌تنها دارای دقت مرتبه ۴ است بلکه تعداد نقاط درگیر آن نیز به‌مراتب کم‌تر (حدود نصف) می‌باشد (شکل(۱)). لازم به توضیح است که اگر عبارت سمت راست معادله (۳۴) به‌صورت تأخیری از گام زمانی قبلی محاسبه گردد در

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

این صورت تعداد نقاط درگیر برابر ۹ خواهد بود (چهار نقطه درگیر نشان داده شده در شکل ۱(الف) حذف خواهند شد) و یک فرمول‌بندی کاملاً فشرده حاصل خواهد شد.

روش‌های متعددی برای حل دستگاه معادلات گسسته‌شده وجود دارند که از جمله آن‌ها روش‌های تکراری فراواهلش متوالی (SOR) [۱۹] و چندشبکه‌ای (Multigrid) [۲۰] می‌باشند. روش SOR نوعی بهبودیافته از روش گوس-سایدل است که با افزودن عامل شتاب‌دهی, سرعت همگرایی را به‌طور قابل توجهی افزایش می‌دهد. روش Multigrid نیز با به‌کارگیری چندین سطح شبکه و کاهش خطا در سطوح مختلف, به‌عنوان یکی از سریع‌ترین الگوریتم‌های حل عددی شناخته شده و توانسته است در مسائل بزرگ بسیار کارآمد باشد. با این وجود, در این تحقیق به‌منظور رعایت سادگی و وضوح فرمول‌بندی و هم‌چنین تمرکز بر توسعه روش تولید شبکه بیضوی با دقت مرتبه بالا, از روش گوس-سایدل به‌عنوان روشی ساده, قابل فهم و بهینه در شمارش تکرارهای اولیه استفاده شده است. این انتخاب به ما امکان داده است تا بر بهبود دقت و بررسی اثر آن بر کیفیت شبکه تمرکز کنیم و در عین حال از پیچیدگی‌های اضافی جلوگیری نماییم.



(ب) (الف)

شکل ۱: شماتیکی از تعداد نقاط درگیر در (الف) روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد (مرتبه ۴), (ب) روش اختلاف محدود فشرده (مرتبه ۴)

ضروری است یادآور شویم که هدف اصلی این افزایش دقت در گسسته‌سازی مرحله تولید شبکه است که باعث بهینه‌سازی فرآیند تولید و کاهش زمان محاسباتی می‌شود, بدون این‌که مستقیماً بر دقت حل نهایی میدان جریان تأثیرگذار باشد. به بیان دیگر, ما دقت گسسته‌سازی تولید شبکه را افزایش می‌دهیم تا سرعت تولید شبکه بهبود یافته و هزینه تولید شبکه کاهش یابد, در حالی‌که دقت حل عددی در مراحل بعدی بدون تغییر باقی می‌ماند. این مزیت مهم, موجب ارتقای کارایی روش در مسائل پیچیده جریان سیال می‌شود.

۳- نتایج

۳-۱- بررسی کیفی

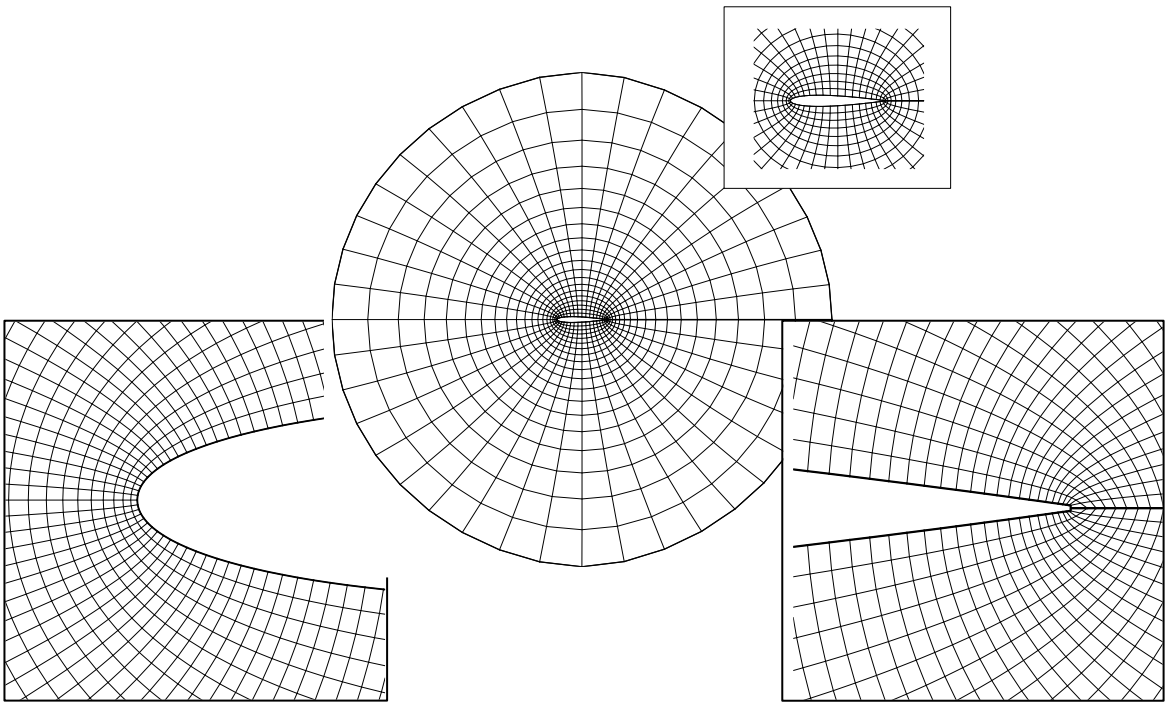
شکل (۲) یک شبکه بیضوی تولید شده با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه را نشان می‌دهد. مجموعه نقاط از ۲۰×۴۱ گره ایجاد شده و از دستگاه شبکه جبری تولید شده (شکل (۳)) به‌عنوان توزیع اولیه شبکه نقاط لازم در تولید این شبکه بیضوی استفاده شده است. هم‌چنین معیار همگرایی (۰/۰۰۰۱ = ERRORMAX) انتخاب گردید.

در تولید شبکه, معیار تعامد خطوط به‌صورت زاویه بین خطوط متقاطع شبکه تعریف می‌شود که زاویه ایده‌آل آن ۹۰ درجه است و هر چه انحراف از این مقدار کم‌تر باشد, نشان‌دهنده کیفیت بالاتر تعامد شبکه است. برای شبکه نشان داده شده در شکل (۲), تقریباً ۹۲درصد زاویه‌ها در بازه ۸۵ تا ۹۵ درجه قرار دارند که نشان‌دهنده تعامد بسیار خوب است. شکل (۲ الف و ب) به‌ترتیب تعامد شبکه را به‌طور کیفی در نواحی انتها و ابتدای ایرفویل نشان می‌دهد. هم‌چنین معیار همواری توزیع نقاط که تغییرات تدریجی اندازه سلول‌های مجاور را بررسی می‌کند, اهمیت بالایی دارد؛ برای این شبکه ضریب تغییر طول سلول‌های

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

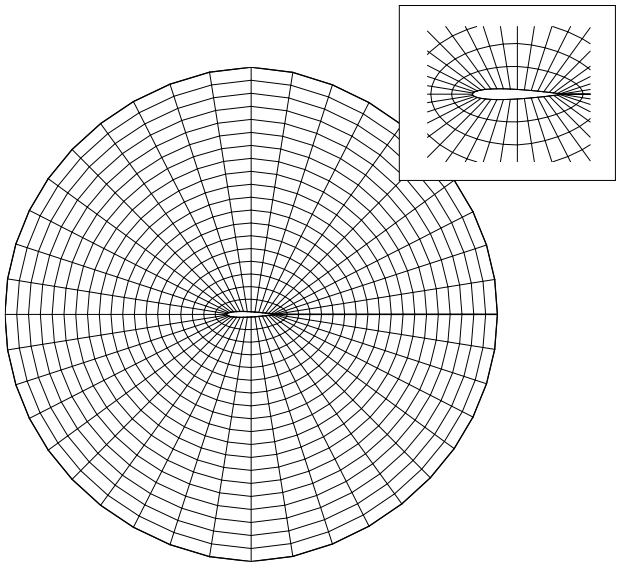
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

مجاور کم‌تر از ۱/۱ گزارش شده که نشان‌دهنده توزیع بسیار یکنواخت و هموار نقاط می‌باشد. شکل (۴) توزیع متریک‌ها در شبکه تولید شده با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده را نشان می دهد. کاملاً به‌وضوح مشاهده می‌شود که توزیع متریک‌ها در نقاط مختلف شبکه به‌طور مناسبی انجام شده است.



(ب) (الف)

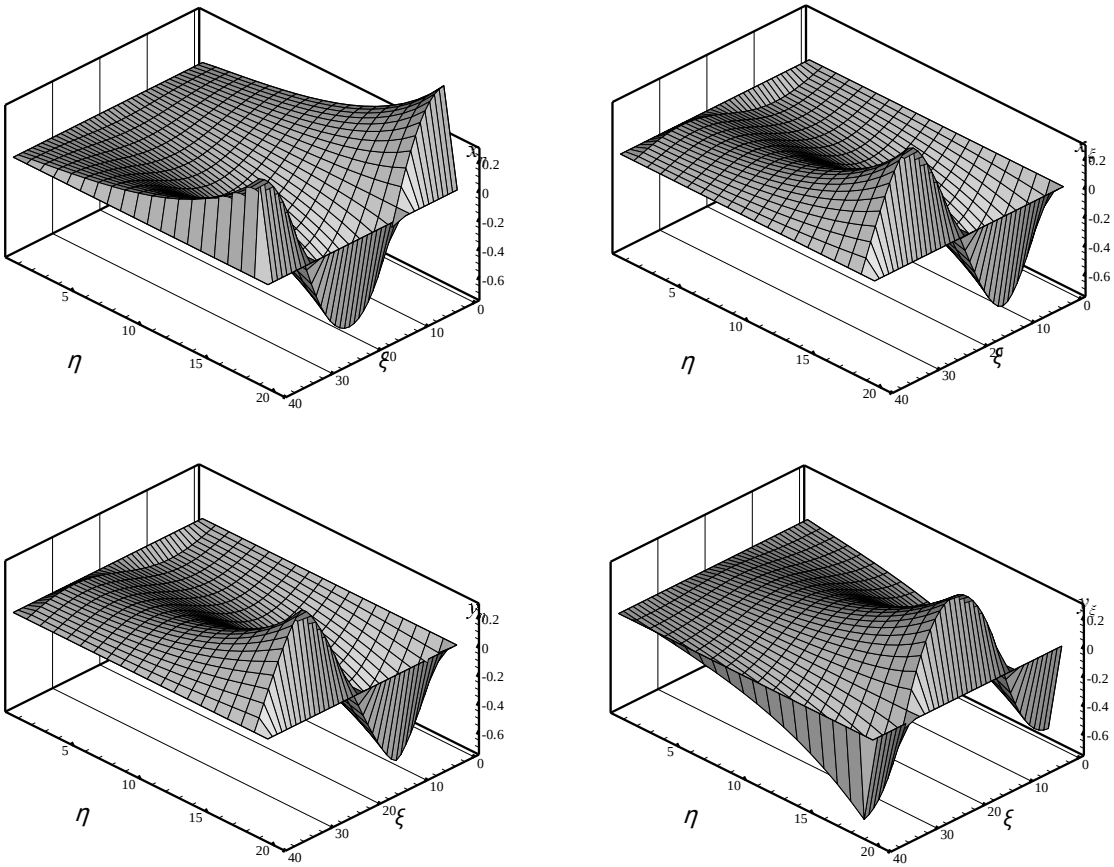
شکل ۲: دستگاه شبکه ۲۰×۴۱ تولید شده با استفاده از معادلات بیضوی و روش اختلاف محدود فشرده. توزیع و تعامد شبکه در (الف) لبه فرار و (ب) لبه حمله



شکل ۳: دستگاه شبکه ۲۰×۴۱ حاصل از یک شبکه ساز جبری استفاده شده به عنوان توزیع اولیه گره‌ها در روش حاضر

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

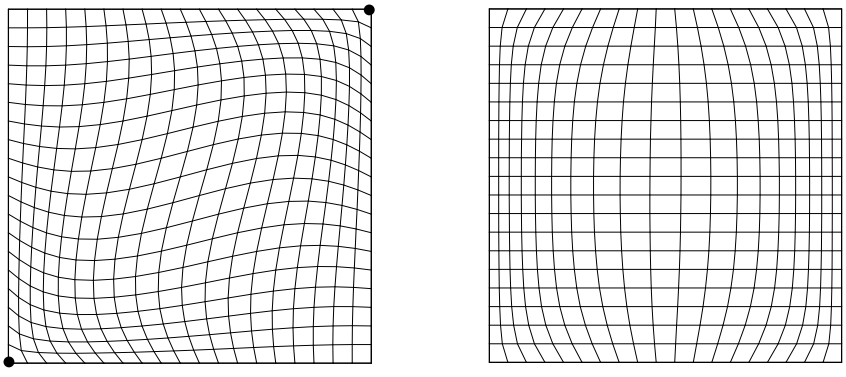
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]



شکل ۴: توزیع متریک‌ها برای دستگاه شبکه تولیدی با استفاده از معادلات بیضوی و روش اختلاف محدود فشرده

۳-۲- بررسی کمی

شکل (۵) شبکه تولید شده در یک فضای مربعی به ابعاد ۱×۱ را نشان می‌دهد. شبکه تولید شده ۲۰×۲۰ و با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده تولید شده است. هم‌چنین فشرده‌سازی در نزدیکی دو مرز عمودی (شبکه ۱ در شکل ۵ الف) و در نزدیکی دو نقطه گوشه (شبکه ۲ در شکل ۵ ب) انجام گردیده است و از ضریب تقویت a=۲۰۰ و ضریب استهلاک c=۰/۱۵ استفاده شده است. معیار همگرایی نیز برابر (*ERRORMAX* = ۰/۰۰۰۰۱) انتخاب گردید.



(ب) **(الف)**

شکل ۵: دستگاه شبکه ۲۰×۲۰ حاصل از معادلات دیفرانسیل پاره‌ای بیضوی با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده. (الف) شبکه ۱: فشرده‌سازی در نزدیکی خط‌های i=1 و i=20 و (ب) شبکه ۲: فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط i=1 , j=1 و i=20 , j=20

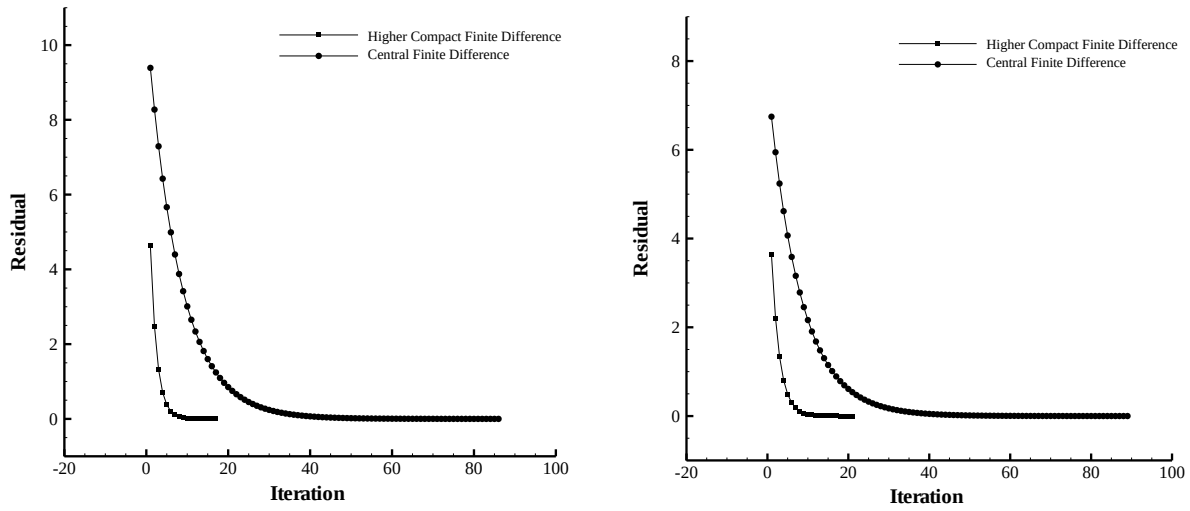
[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

جدول ۱: مقایسه نتایج روش اختلاف محدود مرکزی و روش اختلاف محدود فشرده

شبکه	روش	تعداد تکرار	کاهش زمان محاسباتی
۱	اختلاف مرکزی استاندارد	۸۹	۷۶٪
	اختلاف محدود فشرده	۲۱	
۲	اختلاف مرکزی استاندارد	۸۶	۸۰٪
	اختلاف محدود فشرده	۱۷	

جهت بررسی کارایی روش اختلاف محدود فشرده، نتایج به‌دست آمده از پیاده‌سازی این روش با نتایج به‌دست آمده از اختلاف محدود مرکزی استاندارد مقایسه گردید که در جدول (۱) نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود اگرچه استفاده از این روش در نتایج نهایی تأثیری ندارد اما به علت بالاتر بودن دقت این روش نسبت به روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد تعداد تکرار تا رسیدن به همگرایی و در نتیجه هزینه محاسباتی به شدت کاهش یافته است. مشاهده می شود که استفاده از روش اختلاف محدود فشرده مرتبه چهار به‌جای روش اختلاف محدود مرکزی مرتبه دو، سبب کاهش ۸۰ در صدی در زمان لازم برای یک تولید شبکه گردیده است. دلیل این موضوع این است که روش اختلاف محدود فشرده حاضر نه‌تنها موجب افزایش دقت به‌مراتب بالاتر نسبت به روش تفاضل محدود مرکزی استاندارد می‌شود، بلکه ساختار گسسته‌سازی آن نیز باعث کاهش پهنای باند ماتریس سیستم و تعداد نقاط درگیر در هر تکرار می‌گردد. این ویژگی باعث می‌شود که هر تکرار محاسباتی سریع‌تر و با پیچیدگی کم‌تر انجام شود. بنابراین کاهش قابل توجه زمان محاسباتی هم ناشی از کاهش تعداد تکرارها به خاطر نرخ همگرایی بالاتر و هم به‌دلیل ساده‌تر شدن عملیات در هر تکرار می‌باشد. در ادامه، نشان داده می‌شود که این مزیت دوگانه روش فشرده، کارایی تولید شبکه‌های پیچیده و ریز را به‌طور چشم‌گیری افزایش و هزینه‌های محاسباتی را به صورت مؤثری کاهش می‌دهد.



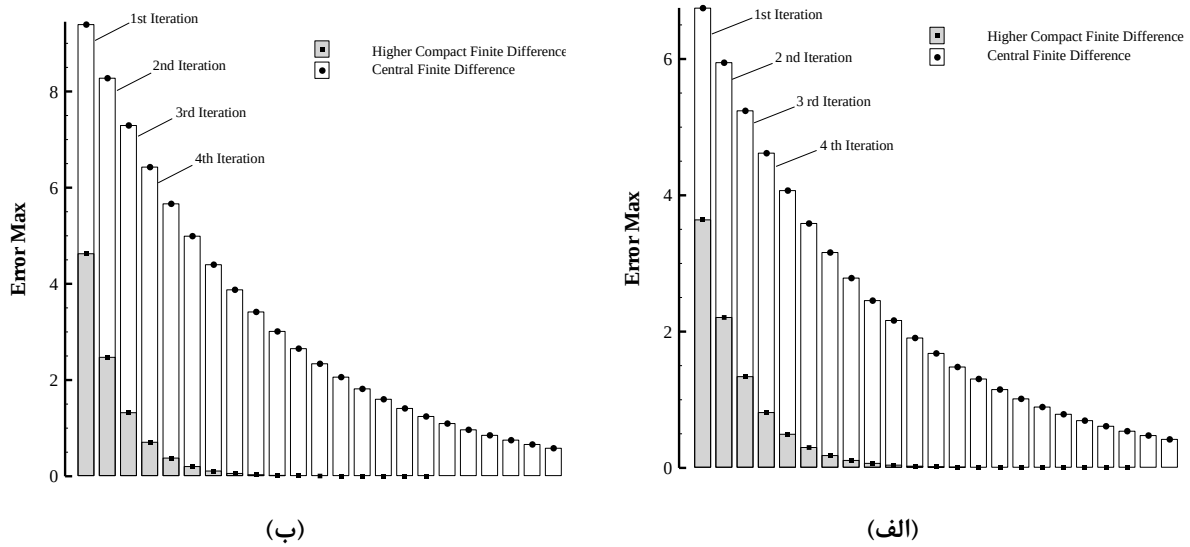
(ب) **(الف)**

شکل ۶: مقایسه نرخ همگرایی روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد و روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا برای (الف) شبکه ۱: فشرده‌سازی در نزدیکی $i=1$ و $i=20$ و (ب) شبکه ۲: فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط $i=1$, $j=1$ و $i=20$, $j=20$

در شکل (۶) نرخ همگرایی روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد و روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا در تولید شبکه حاضر با هم مقایسه شده‌اند. هم‌چنین در شکل (۷) اختلاف خطا در هر تکرار برای دو روش نشان داده شده است. همان‌طور که

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

دیده می شود در روش اختلاف فشرده نرخ همگرایی بسیار بیش‌تر بوده و همگرایی سریع‌تر حاصل شده است. هم‌چنین مقدار خطا در هر تکرار در روش فشرده از همان تکرارهای اولیه افت شدیدی پیدا می‌کند و تقریباً در تکرار نهم به صفر میل می‌کند در صورتی‌که مقدار خطای روش اختلاف مرکزی در این تکرار از نظر بزرگی هم مرتبه با مقدار خطای اختلاف فشرده در تکرار اول است. این نتایج نشان می‌دهد که افزایش دقت از مرتبه ۲ به ۴ چقدر می‌تواند در افزایش نرخ همگرایی مؤثر باشد.



(ب) (الف)

شکل ۷: مقایسه نرخ کاهش خطا در هر تکرار روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد و روش اختلاف محدود فشرده مرتبه بالا برای (الف) شبکه ۱: فشرده‌سازی در نزدیکی خط‌های $i=1$ و $i=20$ و (ب) شبکه ۲: فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط $i=1$, $j=1$ و $i=20$, $j=20$

جدول (۲) مقایسه‌ای بین نتایج روش اختلاف محدود فشرده و روش مرکزی استاندارد در ابعاد شبکه مختلف را نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می‌شود, با کاهش ابعاد شبکه (ریزتر شدن شبکه) کارایی روش اختلاف فشرده افزایش می‌یابد و زمان محاسباتی (تعداد تکرار) به‌شدت کاهش می‌یابد. به‌عنوان مثال در شبکه ۲۰×۲۰, روش استاندارد به ۹۴ تکرار نیاز دارد, در حالی‌که روش فشرده تنها به ۹ تکرار می‌رسد که معادل ۸۰ درصد کاهش در زمان محاسباتی است. این روند در شبکه‌های ریزتر مانند۳۰×۳۰ و۴۰×۴۰ نیز مشاهده می‌شود که کاهش زمان محاسباتی به‌ترتیب حدود ۸۸ و ۹۰ درصد است. این نتایج نشان می‌دهد که روش اختلاف محدود فشرده می‌تواند به‌عنوان یک روش بسیار کارآمد در تولید شبکه بویژه شبکه‌های بسیار ریز که زمان محاسباتی (تعداد تکرار) زیادی نیاز دارند, مورد استفاده قرار گیرد و تعداد تکرار را به‌شدت کاهش دهد.

جدول ۲: مقایسه نتایج روش اختلاف محدود مرکزی و روش اختلاف محدود فشرده در شبکه‌های با ابعاد مختلف (فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط $i=1$, $j=1$ و $i=20$, $j=20$ و $i=1$, $j=20$ و $i=20$, $j=1$)

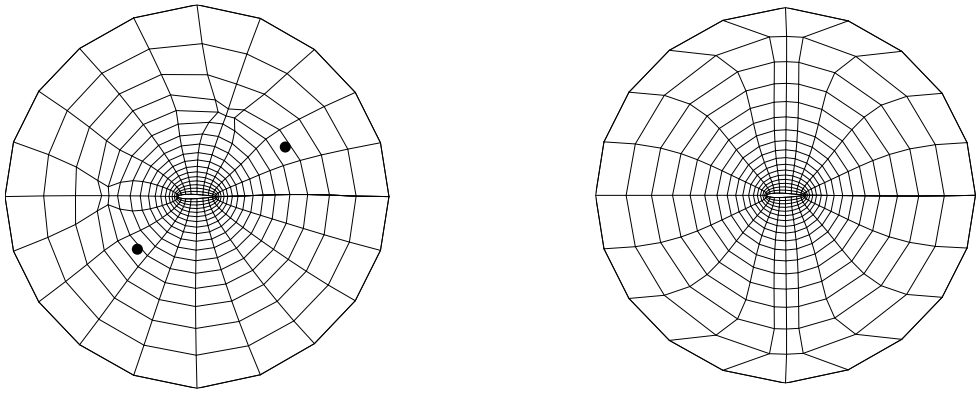
ابعاد شبکه / روش	۲۰×۲۰	۳۰×۳۰	۴۰×۴۰
اختلاف مرکزی استاندارد	۹۴	۲۰۱	۳۶۴
اختلاف محدود فشرده	۹	۲۳	۳۶
کاهش زمان محاسباتی	۸۰٪	۸۸٪	۹۰٪

پیش‌تر مثال‌هایی ارائه شد که در آن‌ها کارایی روش حاضر در مسائل تولید شبکه برای جریان‌های داخلی مورد بررسی قرار گرفت. در این‌جا نتایج برای شبکه ایجاد شده در یک جریان خارجی مورد بررسی قرار می‌گیرند. شکل (۸) دو شبکه بیضوی

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

تولید شده حول ایرفویل NACA0012 در زاویه حمله صفر درجه را نشان می‌دهد. علت بررسی این شبکه آن است که این نوع شبکه‌ها در مدل‌سازی, شبیه‌سازی و حتی بهینه‌سازی آیرودینامیکی اجسام پرنده بوفور از آن استفاده می‌گردد و لذا رسیدن به کارایی بالا برای این نوع شبکه ها می‌تواند در عمل مفید باشد. شبکه تولید شده ۱۸×۲۱ بوده و با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده تولید شده است. در شبکه (الف) فشرده سازی در نزدیکی خطوط i=۶, i=۱۶ انجام شده و از ضریب تقویت a=۴۰ و ضریب استهلاک c=۲ استفاده شده است. معیار همگرایی نیز برابر (*ERRORMAX* = ۰/۰۰۰۱) انتخاب گردید.



(ب) **(الف)**

شکل ۸: دستگاه شبکه ۱۸×۲۱ حاصل از معادلات دیفرانسیل پاره ای بیضوی و با استفاده از روش اختلاف محدود فشرده. (الف) شبکه ۳: فشرده‌سازی در نزدیکی i=6 , i=16 و (ب) شبکه ۴: فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط i=17 , j=14 وj=14 , i=11 ,)

اما در شبکه (ب) فشرده سازی در نزدیکی نقاط i=۱۷ ,j=۱۴ و i=۱۱ ,j=۱۴ انجام شده و از ضریب تقویت a=۲۰۰ و ضریب استهلاک c=۳ استفاده شده است.

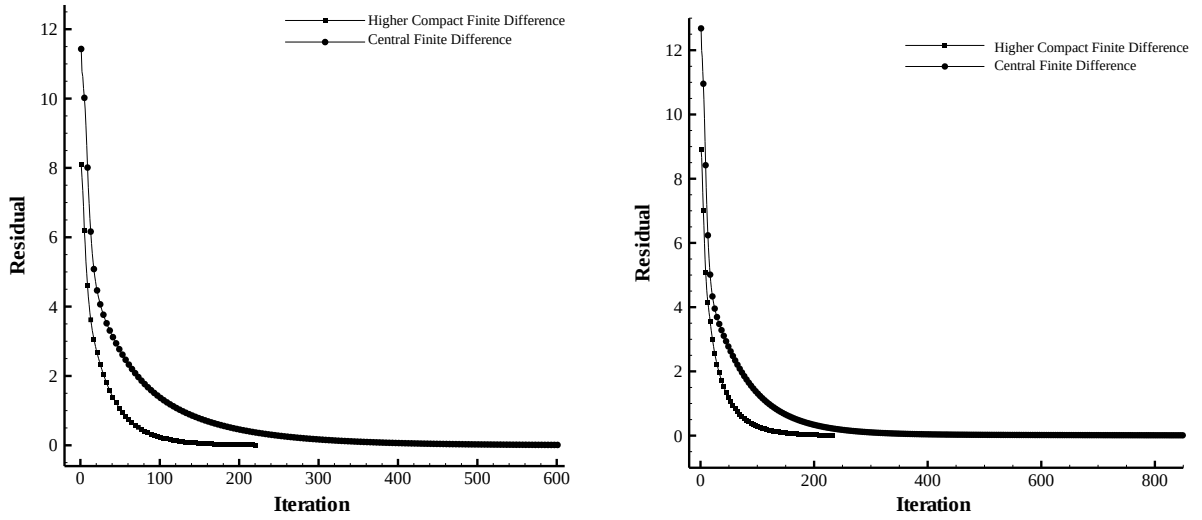
در جدول (۳) مقایسه‌ای بین نتایج حاصل از پیاده‌سازی روش اختلاف محدود فشرده و روش اختلاف محدود مرکزی برای دو شبکه (الف و ب) فوق ارائه شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود بالاتربودن دقت روش فشرده نسبت به روش مرکزی استاندارد سبب گردیده است که تعداد تکرار تا رسیدن به همگرایی و در نتیجه هزینه محاسباتی به‌شدت کاهش یابد. با توجه به بالابودن تعداد تکرار تا همگرایی برای این دسته از مسائل تولید شبکه در مقایسه مسائل تولید شبکه داخلی کاملاً واضح است که استفاده از روش اختلاف فشرده تا چه حد می‌تواند به کارآمدی بیش‌تر روش تولید شبکه در این دسته از مسائل کمک کند. هم‌چنین در شکل (۹) و (۱۰) به‌ترتیب مقایسه‌ای بین نرخ همگرایی و مقدار خطا در هر تکرار برای دو روش مذکور ارائه شده است. مشاهده می‌شود برای شبکه ۳ در تکرار ۱۰۶ام, مقدار باقی‌مانده به کم‌تر از 10^{-3} می‌رسد در حالی‌که برای روش مرکزی در تکرار ۱۹۴ام این مقدار باقی‌مانده حاصل می‌گردد. به‌طور مشابه, برای شبکه ۴ نرخ همگرایی ۲/۷ برابری روش فشرده نسبت به روش مرکزی گزارش می‌شود.

جدول ۳: مقایسه نتایج روش اختلاف محدود مرکزی و روش اختلاف محدود فشرده

شبکه	روش	تعداد تکرار	کاهش زمان محاسباتی
۳	اختلاف مرکزی استاندارد	۸۶۱	۷۴٪
	اختلاف محدود فشرده	۲۳۰	
۴	اختلاف مرکزی استاندارد	۶۰۲	۶۳٪
	اختلاف محدود فشرده	۲۲۲	

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

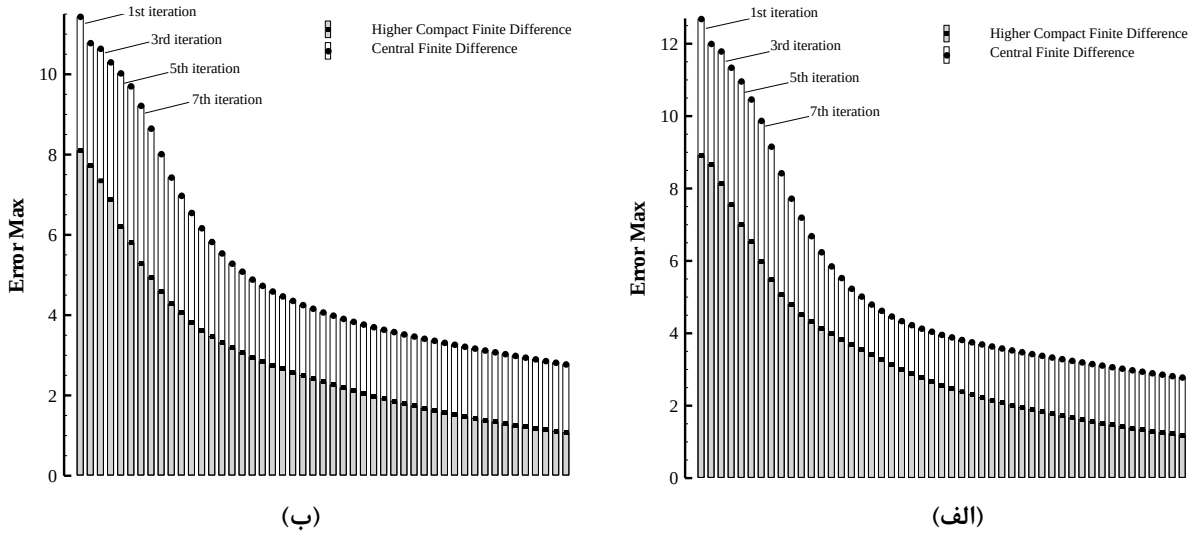
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]



(ب) (الف)

شکل ۹: مقایسه نرخ همگرایی روش اختلاف محدود فشرده و روش اختلاف مرکزی استاندارد. (الف) شبکه ۳: فشرده‌سازی در نزدیکی خطوط i=6 , i=16 و (ب) فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط i=17 , j=14 و i=11 ,j=14)

جدول ۴ مقایسه‌ای بین نتایج روش اختلاف محدود فشرده و روش مرکزی استاندارد در ابعاد شبکه مختلف را برای دو شبکه ۳ و ۴ نشان می‌دهد. همان‌طور که مشاهده می شود, با کاهش ابعاد شبکه (ریزتر شدن شبکه) کارایی روش اختلاف فشرده افزایش می‌یابد و زمان محاسباتی (تعداد تکرار) به شدت کاهش می‌یابد. در شبکه ۳ با ۳/۵ برابر شدن تعداد سلول‌های شبکه, تعداد تکرار در روش فشرده ۱/۲۶ برابر می‌شود در حالی‌که این مقدار برای روش مرکزی ۱/۹۲ برابر می‌باشد که نشان‌دهنده بهبود حدود ۳۵ درصدی در زمان محاسباتی است. به‌طور مشابه, در شبکه ۴ با ۳/۵ برابر شدن تعداد سلول‌های شبکه, تعداد تکرار در روش فشرده ۱/۲۸ برابر می‌شود در حالی‌که این مقدار برای روش مرکزی ۲/۳۷ برابر می‌باشد که نشان‌دهنده بهبود حدود ۴۶ درصدی در زمان محاسباتی است. این نتایج نشان می‌دهد که روش اختلاف محدود فشرده می‌تواند به‌عنوان یک روش بسیار کارآمد در تولید شبکه به‌ویژه شبکه‌های بسیار ریز که زمان محاسباتی (تعداد تکرار) زیادی نیاز دارند, مورد استفاده قرار گیرد و تعداد تکرار را به‌شدت کاهش دهد.



(ب) (الف)

شکل ۱۰: مقایسه مقدار خطا در هر تکرار روش اختلاف محدود فشرده و روش اختلاف مرکزی استاندارد. (الف) شبکه ۳: فشرده‌سازی در نزدیکی خطوط i=6 , i=16 و (ب) فشرده‌سازی در نزدیکی نقاط i=17 , j=14 و i=11 ,j=14)

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

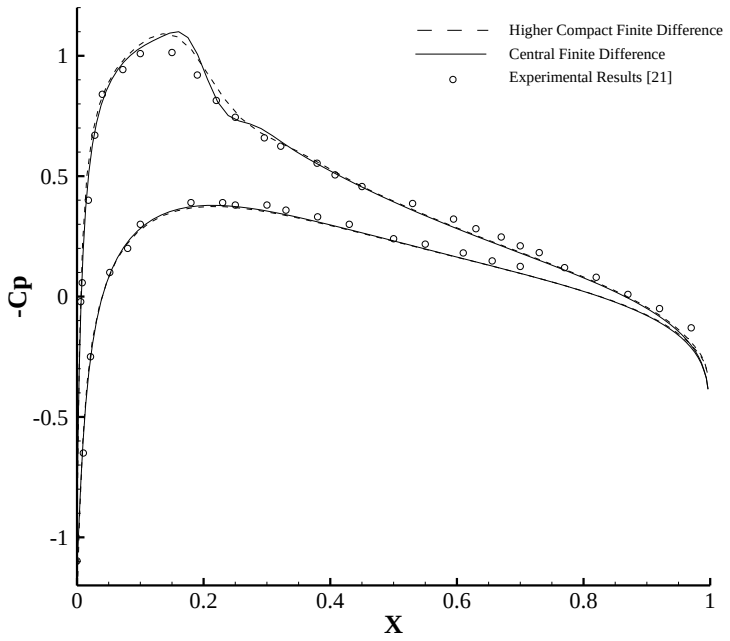
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

جدول ۴: مقایسه نتایج روش اختلاف محدود مرکزی و روش اختلاف محدود فشرده در شبکه‌های با ابعاد مختلف

شبکه	ابعاد شبکه / روش	۲۵×۲۵	۳۵×۳۵	۴۵×۴۵
۳	اختلاف مرکزی استاندارد	۹۳۱	۱۲۳۴	۱۷۹۴
	اختلاف محدود فشرده	۲۷۳	۳۰۲	۳۴۳
	کاهش زمان محاسباتی	۷۱٪	۷۶٪	۸۱٪
۴	اختلاف مرکزی استاندارد	۶۸۲	۱۱۵۴	۱۶۲۲
	اختلاف محدود فشرده	۲۴۴	۲۹۲	۳۱۳
	کاهش زمان محاسباتی	۶۴٪	۷۵٪	۸۰٪

۳-۳- مقایسه نتایج در یک مساله شبیه‌سازی

برای ارزیابی جامع و دقیق روش پیشنهادی, ضروری است که این روش در یک مسئله شبیه‌سازی عملی پیاده‌سازی شود و دقت نتایج به‌دست آمده با نتایج حاصل از تولید شبکه به‌روش سنتی بیضوی مقایسه گردد. این مقایسه به‌منظور سنجش صحت و قابلیت اعتماد روش جدید ضروری ا ست و امکان تعیین میزان بهبود عملکرد و دقت را فراهم می‌کند. این مقای سه مربوط به ضریب فشار به‌دست آمده روی ایرفویل NACA0012 و در شرایط جریان آزاد با عدد ماخ ۰/۸ و زاویه حمله ۱/۴۹ درجه با استفاده از یک شبکه ریز ۸۰×۱۶۰ است. در شکل (۱۱), ضریب فشار به‌دست آمده توسط تولید شبکه فشرده, داده‌های تجربی [۲۱] و ضریب فشار به‌دست آمده از تولید شبکه مرسوم مقایسه می‌شود. مشاهده می‌شود که حل به‌دست آمده از طرح فشرده پیشنهادی از دقت بسیار خوبی برخوردار است و جواب‌های به‌دست آمده از روش حاضر تطابق خوبی را با نتایج به‌دست آمده از تولید شبکه مرسوم و نتایج تجربی نشان می‌دهد. در جدول (۵) مقدار ضریب برآ و پسا حاصل از شبکه تولید شده با استفاده از روش فشرده و مرکزی مقایسه شده است که از مقایسه مقادیر این جدول صحت روش پیشنهادی کاملا تائید می‌شود.



شکل ۱۱: مقایسه ضریب فشار بدست آمده با استفاده از روش فشرده و روش مرکزی مرسوم با داده‌های تجربی

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

جدول ۵: مقایسه ضرایب آیرودینامیکی

روش	ضریب برآ	ضریب پسا
اختلاف مرکزی استاندارد	۰/۲۶۲۱	۰/۰۰۳۳
اختلاف محدود فشرده	۰/۲۶۳۰	۰/۰۰۳۵

۴- نتیجه‌گیری

دراین مقاله یک روش اختلاف محدود فشرده با دقت مرتبه چهار جهت استفاده در مسأله تولید شبکه بیضوی توسعه داده شد. بدین منظور معادله تولید شبکه در یک فرم اختلاف محدود فشرده استخراج و به‌صورت عددی پیاده‌سازی شد. نتایج عددی نشان دادند که روش حاضر در مقایسه با روش اختلاف محدود مرکزی استاندارد کارایی تولید شبکه را افزایش داد. به‌عبارت دیگر به‌علت افزایش دقت, تعداد تکرار لازم تا رسیدن به همگرایی کاهش و زمان محاسباتی لازم برای تولید شبکه کاهش یافت. این مزیت می‌تواند در مسائل حل میدان‌های جریان پیچیده سه‌بعدی که به تولید شبکه پیچیده و ریز و یا مسائل بهینه‌سازی که به چندین بار تولید شبکه در حین بهینه‌سازی نیاز دارند مفید باشد. هم‌چنین نتایج نشان دادند که با ریزتر شدن شبکه, کارایی روش اختلاف محدود فشرده افزایش یافت. برای تولید شبکه داخلی, بیش‌ترین کاهش زمان محاسباتی معادل ۹۰ درصد در شبکه با ابعاد ۴۰×۴۰ حاصل شد در حالی‌که برای تولید شبکه خارجی حداکثر کاهش زمان محاسباتی ۸۱درصد در شبکه با ابعاد ۴۵×۴۵ به‌دست آمد.

به‌هرحال, موضوعاتی وجود دارند که به‌دلیل نوظهور بودن در این پژوهش به‌طور مستقیم مورد بررسی قرار نگرفتند, اما مسیرهای آتی پژوهش را به‌شکل روشنی ترسیم می‌کنند. پیشنهادات ارائه شده نه‌تنها نمایانگر جهات امیدوارکننده‌ای برای گسترش و بهبود روش اختلاف محدود فشرده مرتبه چهار است, بلکه کاملاً با یافته‌های کنونی مقاله پیوند خورده‌اند. افزایش دقت و کاهش قابل توجه زمان محاسباتی که در این تحقیق مشاهده شد, زمینه بسط این روش به مسائل پیچیده‌تر و سه‌بعدی را فراهم می‌آورد. از سوی دیگر, کاربرد روش در مسائل بهینه‌سازی چندمرحله‌ای و تولید شبکه‌های بسیار ریز که نیازمند محاسبات متعدد و دقیق هستند, می‌تواند اثربخشی و کارایی این روش را بیش از پیش نشان دهد. بنابراین, ادامه تحقیقات در این راستا, ضمن تعمیق دانش موجود, نویدبخش توسعه روش‌های عددی بهتر و پاسخ‌گویی دقیق‌تر به چالش‌های علمی پیچیده خواهد بود.

مراجع

[1] B. P. Leonard, A stable and accurate convective modeling procedure based on quadratic upstream interpolation, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 19 (1979) 59–98.
[2] D. Bradly, M. Missaghi, S. B. Chin, A Taylor series approach to numerical accuracy and a third-order scheme for strong convective flows, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 69 (1988) 133–151.
[3] Datta Gupta, L. W. Lake, G. Pope, K. Sepehrnoori, High-resolution monotonic scheme for reservoir fluid flow simulation, In Situ, 15(3) (1991) 289–317.
[4] A. Harten, B. Engquist, S. Osher, S. R. Chkravarthy, Uniformly high order accurate essentially non-oscillatory schemes II, Journal of Computational Physics, 71(2) (1987) 231–303.
[5] M. K. Jain, R. K. Jain, R. K. Mohanty, Fourth-order finite difference method for three dimensional elliptic equations with nonlinear first-derivative terms, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 8(6) (1992) 575–591.
[6] R. S. Hirsh, Higher order accurate difference solution of fluid mechanics problems by a compact differencing technique, Journal of Computational Physics, 9(1) (1975) 90–109.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]
[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

[7] C. K. Forester, Higher order monotonic convective differencing schemes, Journal of Computational Physics, 23 (1977) 1–22.
[8] P. W. Hemker, Mixed defect correction iteration for the accurate solution of the convection diffusion equation, in: W. Hackbusch, U. Trottenberg (Eds.), Multigrid Methods: Proceedings, Koln-Proz1, Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1982), pp. 485–501.
[9] E. C. Gartland Jr., Discrete weighted mean approximation of a model convection-diffusion equation, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing, 3(4) (1982) 460–472.
[10] H. L. Meitz, H. F. Fasel, A compact difference scheme for the Navier–Stokes equations in velocity–vorticity formulation, Journal of Computational Physics, 157 (2000) 371.
[11] S. E. Sherer, J. N. Scott, High Order Compact Finite Difference Method on General Overset Grids, Journal of Computational Physics, 210 (2005) 459–496.
[12] R. K. Shukla, X. Zhong, Derivation of high-order compact finite difference schemes for non-uniform grid using polynomial interpolation, Journal of Computational Physics, 204 (2005) 404–429.
[13] L. K. Bieniasz, Two new compact finite-difference schemes for the solution of boundary value problems in second-order non-linear ordinary differential equations, using non-uniform grids, Journal of Computational Methods in Sciences and Engineering, 8(1) (2008) 3–18.
[14] A. Shah, L. Yuan, A. Khan, Upwind compact finite difference scheme for time-accurate solution of the incompressible Navier–Stokes equations, Applied Mathematics and Computation, 215 (2010) 3201–3213.
[15] Y. Kyei, J. P. Roop, G. Tang, A family of sixth-order compact finite-difference schemes for the three-dimensional poisson equation, Advances in Numerical Analysis, (2010), 1–17.
[16] R. Ansari, R. Gholami, K. Hosseini, A sixth-order compact finite difference method for free vibration analysis of Euler-Bernoulli beams, Mathematical Sciences, 5(4) (2011) 307–320.
[17] S. O. Settle, C. C. Douglas, I. Kim, D. Sheen, On the derivation of highest-order compact finite difference schemes for the one- and two-dimensional Poisson equation with Dirichlet boundary conditions, SIAM Journal Numerical Analysis, 51(4) (2013) 2470–2490.
[18] J. F. Thompson, B. K. Soni, N. P. Weatherill, Numerical grid generation: foundations and applications, North-Holland, (1985).
[19] D. M. Young, Iterative methods for solving partial difference equations of elliptic type, Transactions of the American Mathematical Society, 76(1) (1954) 92–111.
[20] W. L. Briggs, V. E. Henson, S. F. McCormick, A multigrid tutorial (2nd ed.), SIAM (2000).
[21] Http://Xoptimum.Narod.Ru/Results/Compressible/NACA0012.

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

Development and Implementation of a High-Order Compact Finite Difference Method in Numerical Analysis of Fluid Flows

Mohamad Hamed Hekmat

Department of Mechanical Engineering, Tafresh University, Tafresh, Iran

Accepted: summer 2025 Received: autumn 2025

Abstract

In this research, the performance and efficiency of a higher compact finite difference scheme in the generation of a structured grid were investigated. Elliptic partial differential equations have been used to generate a grid system and clustering the grid points in the vicinity of a line or near a point or a combination of them, and also orthogonality of the grid lines on an arbitrary surface was implemented. The main focus of this research was on the extraction of the grid generation equation using a higher compact finite difference. After that, the grid generation equation was discretized using the higher compact finite difference scheme and then was solved numerically by the Gauss-Seidel iterative method. An algebraic grid system was used as the initial distribution of grid points required by the elliptic grid generation. The numerical results for the various test cases, such as grid generation for internal and external flows, were obtained and investigated qualitatively and quantitatively. Moreover, these results were compared with the results of the standard finite difference method. The numerical results showed that using this scheme in comparison with the standard finite difference method increases the efficiency of the grid generation and decreases computational efforts. Based on this, the use of this method results in a reduction of computational time by 70 to 90 percent in grid generation, depending on the grid size and problem conditions. The results showed that the higher compact finite difference scheme can be used as an efficient and high-performance discretization scheme in complex grid generation problems.

Key words: elliptic grid generation, higher order compact finite difference method, standard finite difference method, computational cost
corresponding author: hekmat@tafreshu.ac.ir

[Downloaded from jeed.dezful.iau.ir on 2026-11-08]

[DOI: 10.82377/jeed.2025.3.559]

Cite this article as: Mohamad Hamed Hekmat, Optimization Development and Implementation of a High-Order Compact Finite Difference Method in Numerical Analysis of Fluid Flows, **Journal of Energy Conversion, 2025, 12(3), 53-72**.