بزرگان، نوید؛ طالب‌زادگان، محسن (۱۳۹۰). مقایسه توانایی روش‌های آدومین و آدومین-دوان راچ برای حل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه چهارم با مقادیر مرزی. تبدیل انرژی، ۲ (۱و۲)، ۳۱-۳۴.

مقایسه توانایی روش‌های آدومین و آدومین-دوان راچ برای حل یک معادله دیفرانسیل غیرخطی مرتبه چهارم با مقادیر مرزی

نوید بزرگان[۱*]، محسن طالب زادگان [۲]

[۱] گروه مهندسی مکانیک، واحد آبادان، دانشگاه آزاد اسلامی، آبادان، ایران
[۲] گروه مهندسی مکانیک، واحد اهواز، دانشگاه آزاد اسلامی، اهواز، ایران

دریافت: فروردین ۹۵، بازنگری: اردیبهشت ۹۵، پذیرش: تیر ۹۵

چکیده

در مقاله حاضر، یک معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه چهارم با چهار شرط مرزی مشخص با استفاده از روش اصلاح شده تجزیه‌ی آدومین-دوان راچ حل شده است. اصلاحیه روش آدومین از حل یک سری معادلات جبری غیر خطی در تعیین ضرایب مجهول با ریشه‌های مضاعف جلوگیری کرده و در نتیجه سری بدست آمده از روش آدومین با سرعت زیادی به جواب دقیق همگرا می‌شود. در این روش شرایط مرزی قبل از تعیین ضرایب چند جمله‌ای‌های آدومین اعمال می‌شوند. مثال ارائه شده نشان می‌دهد که روش بحث شده روش کارا و جدید برای بهبود بخشیدن به‌دقت روش آدومین و تسریع درسرعت همگرایی آن، برای حل معادلات دیفرانسیل مراتب بالا با داشتن شرایط مرزی مشخص می‌باشد.

* عهده‌دار مکاتبات: n.bozorgan@gmail.com

کلمات کلیدی: *روش تجزیه آدومین، معادلات دیفرانسیل غیر خطی، مسائل با شرایط مرزی*

۱- مقدمه

به طور کلی یافتن جواب‌های دقیق معادلات دیفرانسیل مشکل است، از این رو اخیراً روش تجزیه آدومین [۱و۲] مورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است. در این روش جواب معادله به‌صورت یک سری نامتناهی در نظر گرفته می‌شود که غالباً به جواب واقعی معادله همگراست [۴,۳]. یکی از پر اهمیت‌ترین تفاوت‌های روش تجزیه آدومین با سایر روش‌های عددی برای یافتن جواب تقریبی معادلات دیفرانسیل این است که می‌توان در این روش جواب را به‌صورت یک چند جمله‌ای محاسبه کرد. بسیاری از محققان ثابت کرده‌اند که اگر جواب دقیق یک معادله دیفرانسیل وجود داشته باشد، آن‌گاه سری بدست آمده از روش آدومین با سرعت زیادی به جواب دقیق همگراست. چندین تکنیک مختلف برای حل معادلات دیفرانسیلی غیر خطی با شرایط مرزی مشخص با استفاده از روش آدومین توسط آدومین و راچ [۵-۷]، آدومین[۱]، وزواز [۸و۹]، تاتاری و دهقان [۱۰] و دهقان و تاتاری [۱۱]ارائه شده است. در این مقالات حل یک سری معادلات جبری غیر خطی با ریشه‌های تکراری در تعیین ضرایب چند جمله‌ای‌های آدومین باعث پیچیده تر شدن و افزایش تعداد مراحل محاسبات می‌شود. در این مقاله قصد داریم برای یک معادله دیفرانسیل غیر خطی با شرایط مرزی مشخص، روش تجزیه آدومین را توسعه دهیم و یک فرمول تکراری را به شیوه‌ای موثر و متفاوت از آدومین بدست آوریم و برای یافتن جواب‌های تحلیلی-تقریبی دقیق‌تر با سرعت همگرایی بیشتر شرایط مرزی معادله را قبل از تعیین ضرایب چند جمله‌ای‌های آدومین اعمال کنیم.

۲-پیاده‌سازی روش‌های آدومین و روش اصلاحی آدومین-دوان راچ با یک مثال عددی

۲-۱ حل مسئله با روش آدومین

برای بدست آوردن جواب تقریبی معادله غیر خطی مرتبه چهارم با شرایط مرزی زیر که توسط هاک و همکاران[۱۲] با روش باقیمانده‌های موزون حل شده بود با استفاده از روش تجزیه آدومین [۱]، آن را به شکل عملگری Lu=g(x)-Nu می‌نویسیم که در آن $L=\frac{d^4}{dx^4}$ و Nu معرف جمله غیر خطی است.

$$u^{(4)}(x)+u(x)u'(x)=4x^7+24, 0\le x\le 1,$$
$$u(0)=0, u'''(0.25)=6, u''(0.5)=3, u(1)=1. \quad (۱)$$

با استفاده از عملگر معکوس L،

$$L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_0^x\int_0^x(.)dxdxdxdx \quad (۲)$$

و اعمال این عملگر بر Lu=g(x)-Nuداریم:

$$u(x)=u(0)+xu'(0)+\frac{x^2}{2}u''(0)+\frac{x^3}{6}u'''(0)+\frac{x^{11}}{1980}+x^4-L^{-1}(uu') \quad (۳)$$

با در نظر گرفتن $B_1=u'(0), B_2=u''(0), B_3=u'''(0)$

و $Nu=uu'=\sum_{n=0}^{\infty}u_n$ داریم:

$$u(x)=xB_1+\frac{B_2}{2}x^2+\frac{B_3}{6}x^3+\frac{x^{11}}{1980}+x^4-L^{-1}(\sum_{n=0}^{\infty}A_n) \quad (۴)$$

در رابطه فوق، A_n ها توسط آدومین و دوان راچ [۱۳] به‌صورت زیر تعریف می‌شود که چند جمله‌ای‌های آدومین نامیده می-شوند.

$$A_n=\frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}N\left(\sum_{k=0}^{\infty}u_k\lambda^k\right)\Big|_{\lambda=0}, n\ge 0 \quad (۵)$$

در تحقیق حاضر، A_n ها با استفاده از رابطه (۵) برای مثال مذکور به‌صورت زیر محاسبه شده است.

$$A_0=u_0u_0', A_1=u_0u_0'+u_0'u_1,$$
$$A_2=u_0u_2'+u_1u_1'+u_2u_0' \quad (۶)$$

با در نظر گرفتن $u_0(x)$به‌صورت رابطه (۷) می‌توان بقیه جملات $u_n(x)$ها را طبق رابطه (۸) بدست آورد.

$$u_0(x)=xB_1+\frac{B_2}{2}x^2+\frac{B_3}{6}x^3+\frac{x^{11}}{1980}+x^4 \quad (۷)$$

$$u_{n+1}(x)=L^{-1}(A_n) \quad (۸)$$

در تحقیق حاضر با اعمال شرایط مرزی $u'''(0.25)=6, u''(0.5)=3, u(1)=1$ و حل دستگاه سه معادله و سه مجهول، ضرایب مجهول B_1،B_2وB_3به‌صورت زیر بدست می‌آیند.

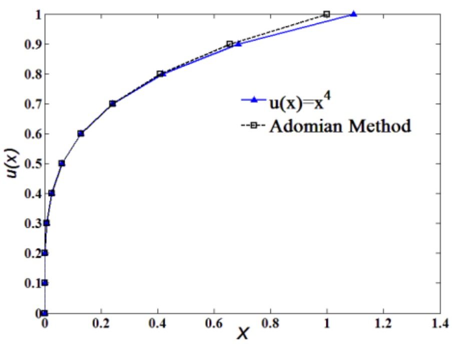
$$B_1=-0,1674e-10, B_2=-0.3665e-13,$$
$$B_3=-0.1635e-13 \quad (۹)$$

بنابراین در مقاله حاضر جواب نهایی مسئله با روش آدومینبا توجه به روابط (۷) و (۸) با مشخص شدن ضرایب مجهول به-صورت زیر بدست آمده است.

$$u(x)=9.2428e^{-13}x^{25}+1.03156e^{-7}x^{18}-2.65037e^{-21}x^{17}-2.75448e^{-21}x^{16}-3.0969e^{-18}x^{15}+5.05e^{-4}x^{11}-3.78472e^{-18}x^{10}-2.42394e^{-16}x^9-4.98638e^{-13}x^8+2.18021e^{-26}x^7+2.55634e^{-25}x^6+2.3352e^{-22}x^5+x^4-2.725e^{-14}x^3-1.8325e^{-13}x^2-0.1674e^{-10}x \quad (۱۰)$$

۲-۲ حل مسئله با روش اصلاحی آدومین-دوان راچ

در مقاله حاضر، با روش اصلاحی آدومین-دوان راچ [۱۳] با تعریف عملگر معکوس L به‌صورت رابطه (۱۱) و انجام محاسبات مشابه روش آدومین $u_0(x)$و$u_n(x)$ها بدست آمده است. $u_0(x)$ در رابطه (۱۲) با اعمال عملگر معکوس L بر رابطه (۱) و با لحاظ کردن شرایط مرزی در نقاط ۰/۰،۲۵ و x=۰/۵ بدست آمده است. سپس در شکل (۱) و (۲) جواب نهایی هر دو روش با جواب دقیق مسئله $u(x)=x^4$ [۱۲] مقایسه شده است. شکل‌های (۱) و (۲) مقایسه جواب‌های بدست آمده از معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه چهارم با شرایط مرزی از هر دو روش آدومین و روش اصلاحی آدومین-دوان راچ را با جواب دقیق مسئله نشان می‌دهد. همان طور که مشاهده می‌شود جواب بدست آمده از روش آدومین-دوان راچ بر جواب دقیق مسئله منطبق است و همچنین به‌علت اینکه شرایط مرزی قبل از تعیین ضرایب چند جمله‌ای‌های آدومین اعمال می‌شود سرعت همگرایی آن بیشتر می‌باشد.



شکل ۱: مقایسه حل روش آدومین با جواب دقیق مسئله

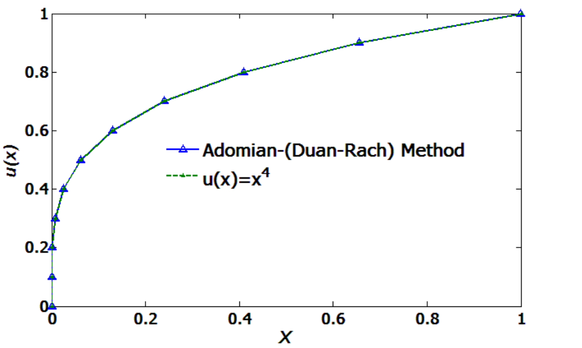
$$L^{-1}(.)=\int_0^x\int_0^x\int_{0.5}^x\int_{0.25}^x(.)dxdxdxdx \quad (۱۱)$$

$$
\begin{aligned}
u_0(x) = & -\frac{117157x}{259522560} - \frac{247x^2}{4718592} - \frac{x^3}{786432} + \\
& x^4 + \frac{x^{11}}{1980}
\end{aligned} \qquad (۱۲)
$$

$$
u_n(x) = -L^{-1}A_{n-1} + x[L^{-1}A_{n-1}]_{x-1}, n = 1, 2, ...,
$$

$$
\begin{aligned}
u_1(x) = & -9.241884516\times10^{-12}x^{25} - 1.031557404\times10^{-7}x^{18} + \\
& +1.574031684\times10^{-13}x^{17} + 7.86828457\times10^{-12}x^{16} \\
& +8.351515442\times10^{-11}x^{15} - 0.000505051x^{11} + \\
& 1.766063549\times10^{-9}x^{10} + 1.038613547\times10^{-7}x^{9} \\
& +1.343549849\times10^{-6}x^{8} - 9.257546841\times10^{-12}x^{7} - \\
& 1.96922983\times10^{-10}x^{6} - 1.698263226\times10^{-9}x^{5} + \\
& 1.197071763\times10^{-6}x^{3} + 0.00005184309329x^{2} + \\
& 0.0004506661406x.
\end{aligned} \qquad (۱۳)
$$

$$
\begin{aligned}
u_2(x) = & 8.512270566820489\times10^{-20}x^{39} \\
& +2.0611808907803163\times10^{-15}x^{32} - \\
& 3.38332271178819\times10^{-21}x^{31} \\
& -1.8299088362943092\times10^{-19}x^{30} \\
& -2.114188144007494\times10^{-18}x^{29} \\
& +2.595882268568207\times10^{-11}x^{25} \\
& -9.721045476235172\times10^{-17}x^{24} \\
& -6.185141837504404\times10^{-15}x^{23} \\
& -8.75155359463062\times10^{-14}x^{22} \\
& +6.59731186730981\times10^{-19}x^{21} \\
& +1.5698793638472888\times10^{-17}x^{20} \\
& +1.5400931909423285\times10^{-16}x^{19} \\
& +1.0315574041064238\times10^{18} \\
& -7.384436702019146\times10^{-13}x^{17} \\
& -4.657207413215791\times10^{-11}x^{16} \\
& -6.590311932698167\times10^{-10}x^{15} \\
& +7.875438264780266\times10^{-15}x^{14} \\
& +1.8306469783644867\times10^{-13}x^{13} \\
& +1.7460492288019172\times10^{-12}x^{12} \\
& -1.6814917783267445\times10^{-17}x^{11} \\
& -1.6625999182262368\times10^{-9}x^{10} \\
& -1.0286632788375289\times10^{-7}x^{9} \\
& -1.3412678929520298\times10^{-6}x^{8} \\
& +1.8224924175027626\times10^{-11}x^{7} \\
& +3.916191589406249\times10^{-10}x^{6} \\
& +3.3907580800253106\times10^{-9}x^{5} \\
& +7.322810785423231\times10^{-8}x^{3} \\
& +5.013353855662456\times10^{-7}x^{2} \\
& +7.649524731979151\times10^{-7}x.
\end{aligned} \qquad (۱۴)
$$



شکل ۲: مقایسه حل روش اصلاحی آدومین-دوان راچ با جواب دقیق مسئله

۳- نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر، معادله دیفرانسیل غیر خطی مرتبه چهارم با شرایط مرزی مشخص به روش‌های آدومین و اصلاحی آدومین-دوان راچ حل گردید. در روش آدومین-دوان راچ، شرایط مرزی قبل از تعیین ضرایب چند جمله‌ای‌های آدومین برای تسریع در سرعت همگرایی سری تجزیه اعمال گردید. جواب‌های بدست آمده از هر دو روش آدومین و روش اصلاحی آدومین-دوان راچ با جواب دقیق مسئله مقایسه و مشاهده شد که جواب بدست آمده از روش آدومین-دوان راچ بر جواب دقیق مسئله منطبق است.

مراجع:

[1] G. Adomian, Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (1994).

[2] G. Adomian, Nonlinear Stochastic Systems Theory and Applications to Physics, Kluwer, Dordrecht, (1989).

[3] Y. Cherruault, Convergence of Adomian’ s method, Kybernets., 18, 2 (1989) 31–39.

[4] Y. Cherruault, G. Adomian, Decomposition methods: A New Proof of convergence, Math. Copmut.Modelling., 18, 12 (1993) 103-106.

[5] G. Adomian, R. Rach, Analytic solution of nonlinear boundary-value problems in several dimensions by decomposition, J. Math. Anal. Appl., 174 (1993) 118–137.

[6] G. Adomian, R. Rach, A new algorithm for matching boundary conditions in decomposition solutions, Appl. Math. Comput., 58 (1993) 61–68.

[7] G. Adomian, R. Rach, Modified decomposition solution of linear and nonlinear boundary-value problems, Nonlinear Anal., 23 (1994) 615–619.

[8] A.M. Wazwaz, Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory, Higher Education, Beijing, Springer, Berlin, (2009).

[9] A.M. Wazwaz, Approximate solutions to boundary value problems of higher order by the modified decomposition method, Comput. Math. Appl., 40 (2000) 679–691.

[10] M. Tatari, M. Dehghan, The use of the Adomian decomposition method for solving

[DOR: 20.1001.1.20089813.1390.2.1.4.0]

multipoint boundary value problems, Phys. Scripta, 73 (2006) 672–676.
[11] M. Dehghan, M. Tatari, Finding approximate solutions for a class of third-order non-linear boundary value problems via the decomposition method of Adomian, Int. J. Comput. Math., 87 (2010) 1256–1263.
[12] M. Haque, M .H. Baluch, M. F. N. Mohsen, Solution of multiple point, nonlinear boundary value problems by method of weighted residuals Int. J. Comput. Math.,19 (1986) 69-84.
[13] J.S. Duan, R. Rach, A new modification of the Adomian decomposition method for solving boundary value problems for higher order nonlinear differential equations, Applied Mathematics and computation, 218 (2011) 4090-4118.